

École des Hautes Études Commerciales  
Majeure Économie

## Paradoxes de vote et modes de scrutin en France

Patrick BLANCHENAY

<patrick.blanchenay@gmail.com>

Sous la direction de : Hervé CRÈS

Mai 2004

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Les problèmes généraux des scrutins</b>	<b>9</b>
I.1 Le théorème de Arrow . . . . .	10
I.2 Manipulabilité et vote stratégique . . . . .	17
I.2.A Le théorème de Gibbard-Satterthwaite . . . . .	17
I.2.B Le sens du vote pour l'électeur . . . . .	19
I.3 Considérations sur les préférences des électeurs . . . . .	22
I.3.A Complétude et transitivité . . . . .	22
I.3.B Universalité ou domaine restreint ? . . . . .	24
<b>II Le scrutin à deux tours : une spécialité française</b>	<b>29</b>
II.1 L'évidence du scrutin majoritaire . . . . .	29
II.2 Le paradoxe de Condorcet . . . . .	31
II.2.A La difficile agrégation . . . . .	31
II.2.B Le taux de qualification comme remède . . . . .	37
II.3 Le scrutin majoritaire à deux tours ne vérifie pas certaines propriétés	40
II.3.A Critère de Condorcet . . . . .	41
II.3.B La non-monotonie . . . . .	42
II.3.C Critère de participation . . . . .	44
II.3.D Critère de renforcement . . . . .	46
II.4 Le vote stratégique dans le système français . . . . .	48
II.4.A Le vote stratégique dans un système à deux tours . . . . .	48
II.4.B L'importance des sondages . . . . .	49

<b>III Le vote par assentiment : une solution ?</b>	<b>53</b>
III.1 Des propriétés intéressantes . . . . .	54
III.1.A L'incitation à la sincérité . . . . .	54
III.1.B La monotonie . . . . .	55
III.1.C Le critère de Condorcet . . . . .	56
III.1.D Des reproches, oui mais . . . . .	56
III.2 L'expérience de Laslier et Van Der Straeten en 2002 . . . . .	58
III.2.A Descriptif de l'expérience . . . . .	59
III.2.B Les résultats . . . . .	59
<b>IV Les paradoxes de la République</b>	<b>63</b>
IV.1 Représentation et équité . . . . .	64
IV.1.A La représentation par circonscription . . . . .	65
IV.1.B La représentation proportionnelle . . . . .	68
IV.1.C Le paradoxe du référendum . . . . .	72
IV.2 Les paradoxes de la consultation populaire . . . . .	74
IV.2.A Le paradoxe des trois référendums . . . . .	74
IV.2.B Le paradoxe d'Ostrogorski . . . . .	75
IV.2.C Le paradoxe d'Anscombe et des élections multiples . . . . .	77
IV.2.D Le paradoxe discursif : un résultat d'impossibilité . . . . .	78
<b>Conclusion</b>	<b>81</b>

# Remerciements

Je tiens à remercier doublement Hervé Crès. D'une part pour m'avoir fait découvrir la théorie du choix social et ses formidables possibilités d'une manière ludique et intéressante. D'autre part pour m'avoir accordé une grande liberté quant à l'exécution de ce mémoire. Le travail n'en a été que plus plaisant.

Je voudrais également remercier Jean-François Laslier et Karine Van Der Straeten. Leurs conseils m'ont orienté et m'ont déterminé à faire du choix social mon futur champ d'investigation.

Enfin, je remercie Antoine et mon père pour leurs précieuses remarques.

# Introduction

« C'EST UNE OPINION GÉNÉRALEMENT REÇUE, & contre laquelle je ne sache pas qu'on ait jamais fait d'objection, que dans une élection au scrutin, la pluralité des voix indique toujours le vœu des électeurs ». Ainsi débute véritablement la théorie du choix social, c'est-à-dire l'analyse des procédures de vote et de leurs propriétés. Cette phrase ouvre l'un des premiers ouvrages étudiant les problèmes liés au vote à la majorité, le célèbre *Mémoire sur les élections au scrutin* de Borda [1784] dont le contenu avait été présenté par son auteur à l'Académie Royale dès 1770. Il est étonnant de voir qu'historiquement, la théorie du choix social commença justement par l'étude des résultats bizarres ou non-souhaités que l'on obtenait par le mode de scrutin le plus évident : le vote à la majorité.

Avant de découvrir la théorie du choix social, notre connaissance des paradoxes de vote se limitait à quelques faits simples. Aux États-Unis par exemple, le Président peut être élu en ayant moins de voix populaires que son adversaire. Cet étrange résultat a été observé en 1876 (Hayes vs. Tilden), en 1880 (Harrison vs. Cleveland) et récemment en 2000 (Bush vs. Gore).

C'est dans ce sens « orthodoxe » que nous avons abordé notre travail sur les paradoxes : qui va contre le sens commun, la *doxa*. Le *Trésor de la Langue Française* dit : « une affirmation surprenante en son fond et/ou en sa forme, qui contredit les idées reçues, l'opinion courante, les préjugés ». Citons ces quelques mots simples et justes de la préface de *Voting paradoxes and how to deal with them* [Nurmi, 1999] :

« Voting paradoxes are unpleasant surprises encountered in voting. Typically they suggest that something is wrong with the way individual opinions are being expressed or processed in voting. The outcomes are

bizarre, unfair or otherwise implausible, given the expressed opinions of voters. »

Dans ce sens-là, un paradoxe de vote repose sur les préjugés que l'on peut avoir quant à un scrutin et ses propriétés attendues. Et ces habitudes dépendent parfois du temps et du lieu. Ainsi, il semble normal pour un Français qu'un candidat ayant reçu plus de soutien que son adversaire soit élu Président ; le résultat des élections présidentielles américaines de 2000 peut alors paraître déroutant et provoquent des question comme « pourquoi ne changent-ils pas de système ? ».

Notre démarche à partir de résultats surprenants nous a conduit à une approche plus formalisée et, partant, à des paradoxes formalisés, comme le théorème d'Arrow ou celui de Gibbard-Satterthwaite. Plus que des surprises, ces paradoxes sont plutôt des contradictions logiques entre certaines propriétés, d'où le nom qu'on leur donne parfois de théorème d'impossibilité. Ces paradoxes théoriques se présentent le plus souvent sous la forme : sous les hypothèses X et Y, tel mode de scrutin (techniquement, « règle de choix social ») aboutit à tel paradoxe. Seulement comme toute modélisation, la formalisation logique d'un mode de scrutin requiert de poser explicitement ses hypothèses. Et c'est déjà un premier écueil, lorsque l'on se perd dans des modèles, que de se laisser séduire aveuglément sans prendre garde aux hypothèses, parfois très restrictives de ces jouets intellectuels.

Un exemple de paradoxe de ce genre est apparu pendant le renouveau de la théorie du choix social dans les années cinquante. On essayait alors d'expliquer avec des arguments économiques pourquoi un électeur allait voter. On essayait d'analyser la décision de l'électeur en terme de coût/gain : coût du déplacement jusqu'au bureau de vote, gain d'avoir pesé dans la balance électorale etc. Cette analyse aboutissait au paradoxe suivant : un vote est tellement insignifiant quand le nombre de votants est important, il est même négligeable par rapport aux erreurs de comptage. Alors pourquoi aller voter ? Personne n'a intérêt à aller voter, ce qui est évidemment contre-factuel ! Le paradoxe provient sans doute de l'exagérée prétention d'expliquer des motivations humaines simplement en termes économiques de gain/coût.

Pour les mêmes raisons, nous avons évité de traiter tout aspect sociologique du vote, notamment sur les motivations, ou sur la façon dont les électeurs construisent leurs préférences. Le seul écart que nous nous sommes permis concerne l'hypothèse d'unimodalité. Les modèles spatiaux de vote considèrent les candidats électoraux dans un espace à plusieurs dimensions, chaque dimension représentant un aspect quantifiable du programme : typiquement, le taux d'imposition, etc. Chaque

électeur est caractérisé par un programme idéal, c'est-à-dire un point de l'espace multi-dimensionnel. De même pour chaque candidat. Pour un électeur donné, plus un candidat est près de son programme idéal, mieux il est classé dans ses préférences. On utilise donc une distance sur l'espace multi-dimensionnel pour comparer les différents candidats afin que chaque électeur puisse donner ses préférences.

L'hypothèse d'unimodalité s'inscrit dans ce cadre en considérant un espace de dimension 1. En France, c'est typiquement une représentation linéaire de la vie politique selon un axe gauche-droite. On considère que l'électeur a un idéal sous forme de point : il n'existe aucun point préféré à celui-ci, et plus on s'éloigne de ce point — dans un sens ou dans l'autre — plus le candidat diminue dans les préférences de l'électeur. Il serait intéressant de vérifier empiriquement la pertinence des modèles spatiaux et la fréquente hypothèse d'unimodalité ; ils sont fréquents dans la littérature et permettent d'obtenir des résultats assez poussés. Nous pensons pour notre part que ce type d'hypothèses, qui permettent d'obtenir des résultats très convaincants, doivent être considérés avec prudence.

Par curiosité, nous avons plus modestement essayé de comprendre les paradoxes, c'est-à-dire les surprises et les contradictions logiques, que pouvait amener un problème en apparence simple : agréger les préférences, souvent divergentes, de plusieurs individus pour aboutir à un choix collectif. La littérature dans ce domaine est riche et nous avons pu nous appuyer sur des ouvrages de référence dans ce domaine.

Nous avons pris le parti de concentrer notre étude sur les modes de scrutin français. De même que la théorie du choix social a débuté par l'étude de paradoxes, de même nous commençons par l'étude de paradoxes en France notre apprentissage de ce domaine de recherche à la limite entre l'économie, dont il utilise les méthodes, et la science politique, dont il alimente le corpus. Nous nous sommes attachés à relever les problèmes les plus saillants du système électoral français. Si le dessin paraît noir, nous avons tenté, autant que faire se peut, de tirer des enseignements de ces paradoxes sur la vie politique française et d'envisager quelques solutions.

Le chapitre **I** s'attache à décrire les problèmes qui touchent tous les modes de scrutin. Nous faisons notamment référence aux deux résultats formels les plus connus de la théorie du choix social : le théorème de Arrow et celui de Gibbard-Satterthwaite. Nous découvrons ainsi que les paradoxes sont inévitables.

Dans le chapitre **II**, nous étudions plus spécifiquement les problèmes du vote majoritaire à un ou deux tours. Par des contre-exemples, nous montrons qu'ils peuvent conduire à des situations paradoxales. Nous expliquons en particulier pour-

quoi le scrutin majoritaire à deux tours, très employé en France, incite certains électeurs à « mentir » sur leur bulletin.

Le chapitre III est entièrement dédié au vote par assentiment, un mode de scrutin simple qui gagnerait à remplacer le scrutin majoritaire à deux tours. Nous décrivons ses avantages sur le mode de scrutin actuel, ainsi qu'une expérience menée en France qui montre qu'il pourrait être aisément mis en place pour des élections officielles.

Enfin, le chapitre IV s'intéresse lui à l'intervention du citoyen dans la vie publique selon les deux modalités de l'assemblée et du référendum. Nous montrons d'une part les difficultés à constituer une assemblée réellement représentative, d'autre part que les référendums sont imparfaits.



# Chapitre I

## Les problèmes généraux des scrutins

L'étude des modes de scrutin remonte à l'Antiquité grecque, au début des réflexions de nature politique. Ainsi Farquharson [1969] cite une correspondance de Pline le Jeune<sup>1</sup> pour illustrer une situation de vote où s'affrontent trois options. Pline a une intuition particulièrement fine des problèmes que peuvent poser ce vote et pressent déjà que la façon dont le vote est organisé peut en déterminer l'issue.

Il faut cependant attendre le XVIII<sup>e</sup> siècle pour que les modes de scrutin soient analysés formellement grâce aux outils mathématiques qui se sont développés entre temps. S'illustrent alors deux Français, le Marquis de Condorcet et Jean-Charles de Borda. Tous deux critiquent les effets pervers du scrutin majoritaire, dit *scrutin à la pluralité*, en ce qu'il ne permet pas toujours d'obtenir un résultat simple, comme nous le verrons à la section II.2 sur le paradoxe de Condorcet.

L'étude formalisée des modes de scrutin démarre véritablement après la Seconde Guerre mondiale, quand des économistes comme Arrow [1951] appliquent des outils mathématiques et économiques pour étudier les sciences politiques ; ils étudient notamment les axiomes devant régir les modes de scrutin. Ces axiomes constituent des propriétés, souvent mathématisées, concernant les modes de scrutin. Ils reflètent une conception démocratique de la participation politique

Un gouvernement démocratique, au sens moderne du terme, s'oppose à un gouvernement autoritaire en ce qu'il laisse le pouvoir au peuple et n'agit qu'en son nom. Il reconnaît en cela la valeur de l'individu et sa capacité à prendre des décisions sur les sujets qui touchent la société. Le scrutin permet de recueillir les

---

<sup>1</sup>cf. le paragraphe II.2.A.2.

différents avis en vue d'une prise de décision ; il s'agit le plus souvent de pourvoir un poste de responsabilité politique. Le scrutin doit vérifier certaines conditions. L'une d'elles est, par exemple, que le scrutin ne soit pas imposé, c'est-à-dire que son résultat dépende, si possible de manière égale, des préférences de chacun. Ou qu'un individu seul ne puisse décider pour toute la communauté.

Ce principe est entériné dans la Déclaration universelle des droits de l'Homme adoptée par l'ONU en 1948 :

- Article 21**
1. Toute personne a le droit de prendre part à la direction des affaires publiques de son pays, soit directement, soit par l'intermédiaire de représentants librement choisis.
  2. Toute personne a droit à accéder, dans des conditions d'égalité, aux fonctions publiques de son pays.
  3. La volonté du peuple est le fondement de l'autorité des pouvoirs publics ; cette volonté doit s'exprimer par des élections honnêtes qui doivent avoir lieu périodiquement, au suffrage universel égal et au vote secret ou suivant une procédure équivalente assurant la liberté du vote.

Hélas le théorème de Arrow (cf. section [I.1](#)) montre qu'*aucun* mode de scrutin ne peut simultanément vérifier certaines propriétés ; au lieu d'avoir découragé l'aspiration démocratique des élections, ce paradoxe a au contraire stimulé une importante littérature d'études des modes de scrutin. Après le résultat de Arrow, il convient de souligner l'importance du théorème de Gibbard et Satterthwaite (section [I.2.A](#)). Selon ce théorème, dont la portée universelle est là encore très déconcertante, *aucune* procédure ne peut exclure le vote stratégique, c'est-à-dire la possibilité que les électeurs ne révèlent pas leurs préférences réelles mais des préférences qui leur permettent d'obtenir un meilleur résultat.

Ces deux grands résultats généraux peuvent déjà nous éclairer sur les problèmes que peuvent rencontrer les différents types de scrutins et notamment les scrutins français.

## I.1 Le théorème de Arrow

Certains considèrent que le vote est un simple processus, une sorte de machine que l'on alimente avec les préférences de chacun et d'où sort une préférence collective avec l'assurance d'y trouver l'expression d'une *volonté générale*. Comme

l'ont montré les travaux de Condorcet et Borda au XVIII<sup>e</sup> siècle, il n'en est rien. Le vote n'est ni simple ni parfait. C'est dans ce sens que s'inscrit le résultat de Kenneth J. Arrow. En 1951, Arrow montre qu'aucun mode de scrutin ne peut vérifier simultanément cinq propriétés, dont chacune est pourtant souhaitable dans un système politique dit « démocratique ». Dans la seconde édition (1963), Arrow ramène ce nombre de propositions à quatre. Elles restent incompatibles mais permettent d'englober plus de cas, ce qui confère au théorème une portée plus générale encore. C'est cette formulation que nous avons utilisée car elle semble préférable à la formulation originale, de l'avis même de Arrow dans ses *Notes on the theory of social choice*. Ce nouveau système de conditions ne peut toujours pas être vérifié par un même mode de scrutin, même s'il relâche certaines hypothèses. Le théorème de Arrow n'en est que plus déconcertant.

Voici ces conditions<sup>2</sup> :

**Condition 1 (Universalité)** *Tous les profils de préférence sont acceptables.*

Si l'on considère une préférence comme une permutation des  $n$  des candidats (il s'agit de classer tous les candidats dans son ordre de préférence, par exemple  $b \succ c \succ a$ ), alors la condition d'universalité stipule que toutes les permutations sont autorisées. Ainsi, un mode de scrutin vérifiant cette propriété n'interdit l'expression d'aucune opinion. Dans une société dite démocratique, les grandes options de l'État sont dictées par l'avis des citoyens. Cette vision advient avec les Lumières au XVIII<sup>e</sup> siècle et s'affirme dans la *Déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen* de 1789 ; elle se retrouve dans les articles 18 et 19 de la Déclaration universelle des droits de l'Homme :

**Article 18** Toute personne a droit à la liberté de pensée, de conscience et de religion ; ce droit implique la liberté de changer de religion ou de conviction ainsi que la liberté de manifester sa religion ou sa conviction seule ou en commun, tant en public qu'en privé, par l'enseignement, les pratiques, le culte et l'accomplissement des rites.

**Article 19** Tout individu a droit à la liberté d'opinion et d'expression, ce qui implique le droit de ne pas être inquiété pour ses opinions et celui de chercher, de recevoir et de répandre, sans considé-

---

<sup>2</sup>Nous proposons ici, faute d'avoir consulté une traduction française de l'ouvrage, notre propre adaptation.

rations de frontières, les informations et les idées par quelque moyen d'expression que ce soit.

Dans cet esprit, et pour que l'on puisse considérer qu'un scrutin est « juste », aucune opinion ne doit être *a priori* interdite. Cela permettrait sinon la censure de certaines opinions, à la discrétion du gouvernement. Un gouvernement contesté pourrait alors empêcher l'expression de courants politiques qui le désapprouvent. Or dans une société démocratique, le pouvoir doit rester sous le contrôle du peuple. On ne saurait donc concevoir de société démocratique sans la possibilité pour le peuple de ne pas reconduire ses dirigeants, par le biais du vote. Il est donc indispensable d'autoriser l'expression de toutes les opinions sur des sujets politiques, notamment celles qui désapprouvent le gouvernement en place. Par ailleurs, ce principe d'universalité permet d'éviter le problème philosophique de savoir quelles limites fixer quand il s'agirait de déterminer les opinions acceptables.

**Condition 2 (Unanimité ou Pareto-optimalité)** *Si tous les électeurs préfèrent  $x$  à  $y$  alors la préférence collective doit préférer  $x$  à  $y$ .*

$$[\forall i, x \succ_i y] \Rightarrow [x \gg y]$$

(où  $\succ_i$  désigne la préférence de l'électeur  $i$  et  $\gg$  la préférence collective).

Cette condition paraît évidente. On ne comprendrait pas pour quelle raison un candidat, préféré à un autre par chacun des électeurs, ne verrait pas cet avantage reflété dans la préférence collective.

**Définition (Dictateur)** *Un dictateur est un individu  $i$  tel que, quels que soient les préférences des autres individus, la préférence de  $i$  implique la préférence collective.*

$$\forall (\succ_j)_{j=1 \dots n, j \neq i}, \forall (x, y), \quad x \succ_i y \Rightarrow x \gg y$$

**Condition 3 (Non-dictature)** *Il n'existe pas de dictateur.*

Autrement dit, il n'existe pas d'individu pour dicter ses choix à l'ensemble de la société. Il paraît évident que l'on ne peut admettre de dictateur si on veut que l'avis de chacun puisse infléchir la décision finale (ce qui ne signifie *pas* que chacun puisse à lui seul faire changer la décision finale). Cela remettrait en question la valeur intrinsèque de chaque individu et instaurerait une discrimination entre les individus qui, pour des raisons plus simples encore qu'avec la discrimination des opinions (cf. *supra*), est inacceptable dans une société démocratique.

Définie comme telle, la notion de dictature doit cependant être considérée avec prudence. Un mode de scrutin dans lequel le bulletin de vote d'un électeur est tiré au hasard pour déterminer seul le résultat, est bel et bien dictatorial dans le sens de la condition 3 du théorème de Arrow. Un candidat a d'autant plus de chance d'être choisi qu'il est représenté dans le choix des électeurs. Un tel mode de scrutin, pratiquement difficile, pose un problème de légitimité du hasard, et ce problème est d'autant plus prégnant que le mandat pour lequel a lieu l'élection est long. Si un candidat très marginal venait à être élu pour un long mandat, cela reviendrait à frustrer toute la population ou presque pendant plusieurs années. Cela ne viole pas la condition d'unanimité à proprement parler mais si on l'élargissait en tenant qu'il ne faut pas frustrer une très grande partie de la population (cette taille étant du reste problématique à définir), un tel mode de scrutin serait rejeté. Certes la probabilité d'un tel événement est faible mais ses conséquences seraient énormes ; un tel système inciterait, du reste, une multitude de candidats à « tenter leur chance ». Ce système en apparence juste ne doit pas être utilisé.

**Condition 4 (Indépendance des états non-pertinents, IENP)** Soient  $(\succ_i)_{i=1,\dots,n}$  et  $(\succ'_i)_{i=1,\dots,n}$  deux ensembles de préférences individuelles et  $(\gg)$  et  $(\gg')$  les préférences collectives correspondantes.

$$\forall i, x, y \quad [x \succ_i y \Leftrightarrow x \succ'_i y] \Rightarrow [x \gg y \Leftrightarrow x \gg' y]$$

Traduisons : supposons que certains électeurs changent leurs préférences, à l'occasion d'une campagne électorale par exemple. On passe alors d'un profil de préférences  $(\succ_i)_{i=1,\dots,n}$  à un profil  $(\succ'_i)_{i=1,\dots,n}$ . Supposons de plus que ce changement n'affecte les préférences d'*aucun* électeur entre les candidats  $x$  et  $y$  : si l'électeur  $i$  préférerait le candidat  $x$  à  $y$  auparavant, il en est de même après le changement (ce qui s'écrit  $x \succ_i y \Leftrightarrow x \succ'_i y$ ). Dans ce cas, on souhaite que l'ordre entre  $x$  et  $y$  dans la préférence collective reste inchangé : si le candidat  $x$  était collectivement préféré à  $y$ , il serait en effet logique — comme le changement de chaque préférence individuelle n'affecte pas l'ordre entre les deux candidats — que cela reste le cas ( $x \gg y \Leftrightarrow x \gg' y$ ).

De manière simplificatrice, on souhaite que la préférence collective entre  $x$  et  $y$  dépende uniquement des préférences individuelles entre  $x$  et  $y$ . Imaginons que ce ne soit pas le cas. Prenons un exemple pour illustrer la bizarrerie à laquelle cela peut aboutir.  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont candidats à une élection ; tous les électeurs préfèrent  $X$  à  $Y$  car ses promesses électorales sont plus attrayantes. Dans ce cas, l'évidence

de la condition 2 nous promet que  $X$  sera collectivement préféré à  $Y$ . Supposons maintenant que  $Z$  fasse un discours qui lui assure une plus grande popularité, mais sans que cela n'affecte le classement entre  $X$  et  $Y$  de chaque électeur. On ne voit pas alors pourquoi, après le discours de  $Z$ ,  $X$  ne serait plus préféré collectivement à  $Y$ .

Quoiqu'intuitive, cette condition a parfois été considérée comme trop forte. Certains considèrent en effet que le choix entre certaines propositions peut dépendre d'autres propositions. Riker donne un exemple de ce type d'argument :

« In presidential preference primary, for example, choice among several candidates may depend on judgments of still other candidates. For example, in the 1976 Democratic primaries, in thinking about a decision between Carter and Udall as if they covered the whole spectrum of party ideology, a mildly left-of-center voter might prefer Udall. But if the voter thought about Jackson also, so that Udall appeared as an extremist, that same voter might have preferred Carter to Udall. So "irrelevant" alternatives (here, Jackson) may really be "relevant". » [Riker, 1982, p.129]

Riker répond lui-même à ce type de raisonnement en arguant qu'il est de toute façon difficile de déterminer à partir de quel moment une alternative doit être considérée ou non comme pertinente, et critique la méthode de Hansson<sup>3</sup> comme introduisant trop d'arbitraire dans le processus de décision qu'est le vote. D'une manière générale, Riker soutient la condition IENP, sans laquelle il ne resterait que des procédures de vote introduisant de l'arbitraire, telles des loteries : des méthodes qui seraient donc non-déterministes, c'est-à-dire qui avec les mêmes données au départ (les votes des électeurs) ne donneraient pas toujours le même résultat (et dérogeraient ainsi à la définition mathématique d'une fonction).

À partir de ces quatre conditions, Arrow définit un théorème d'impossibilité particulièrement puissant :

**Théorème de Arrow (1951,1963)** *S'il existe au moins trois candidats alors toute fonction de choix social non-imposée donnant une préférence collective transitive et complète ne peut vérifier en même temps les conditions 1 à 4.*

Rappelons brièvement les quatre conditions : universalité, unanimité, indépendance des états non-pertinents et non-dictature. Cela revient à dire que, lorsque les

---

<sup>3</sup>Riker fait ici référence à l'article de Bengt Hansson « The Independence Condition in the Theory of Social Choice », *Theory and Decision*, vol. 4 (Septembre 1973), pp. 25–49.

électeurs ont à choisir parmi trois candidats ou plus, aucune procédure de choix collectif ne peut être à la fois démocratique (conditions 1 à 4) et donner un résultat cohérent (transitivité et complétude). Les notions de complétude et de transitivité, étudiées dans la sous-section I.3.A, paraissent évidentes lorsque l'on considère des individus. Mais est-il légitime de considérer une préférence collective de la même façon ? Comme nous le verrons à la section II.2 sur le paradoxe de Condorcet, l'intransitivité de la préférence collective peut être dans certains cas un véritable problème. En revanche, on peut dès maintenant s'interroger sur la pertinence de la complétude. Est-il absolument indispensable que la procédure de choix collectif aboutisse à un classement de tous les candidats ? Nous pensons que non. La procédure de choix collectif est destinée, non pas à fournir une préférence totale de tous les électeurs, mais à sélectionner un vainqueur parmi les candidats <sup>4</sup> pour lui confier un mandat — du moins dans le cadre majoritaire, qui occupe la place la plus importante dans les modes de scrutin français. On peut donc s'autoriser des plages d'indétermination entre certains candidats tant qu'une telle plage ne se retrouve pas dans la partie supérieure du classement des candidats. Dans un cas extrême, on pourrait donc tolérer qu'un candidat soit en-tête et que tous les autres soient contenus dans une plage d'indétermination ou dans un cycle :

$$A \gg B \top C \top D$$

où  $\top$  désigne une indétermination collective, c'est-à-dire qu'on ne peut pas dire, par exemple, que  $B \gg C$  ni que  $C \gg B$  (ce n'est *pas* de l'indifférence). Ceci se rapproche des remarques que l'on fera à la section II.2 sur les cycles. On verra à la sous-section II.2.B qu'il est possible, dans le cas du vote majoritaire, d'arbitrer entre complétude et transitivité.

Si on considère donc que la complétude n'est pas un objectif indispensable (certes suffisant mais non-nécessaire), ce pourrait être un travail de recherche intéressant de ré-étudier le théorème de Arrow en relâchant l'exigence de complétude. Au prix de ce relâchement, il serait peut-être possible de casser l'incompatibilité des conditions 1 à 4, ce qui justifierait la recherche d'une procédure de vote juste.

---

<sup>4</sup>Il existe une certaine confusion des termes. Certains considèrent une fonction de choix social comme associant au profil de préférences des électeurs un vainqueur ; d'autres comme un sous-ensemble des candidats ; d'autres encore, comme Arrow, Gibbard et Satterthwaite, considèrent des fonctions qui associent une préférence collective (si possible un préordre total, comme défini à la sous-section I.3.A) à des préférences individuelles. Gärdenfors [1976] fait lui la distinction entre *social choice function* et *resolute social choice function*.

Outre la difficulté pratique que pose l'impossibilité d'obtenir un choix social cohérent sous les conditions 1 à 4, l'absence de signification du résultat obtenu pose également un problème philosophique. Il est impossible de déduire des jugements de chacun ce que doit être le bien-être social (« *social welfare* ») ou, pour reprendre une expression plus souvent utilisée, ce qu'est l'intérêt général. On peut dès lors remettre en question les théories philosophiques « holistes<sup>5</sup> » qui mettent en avant l'existence d'un intérêt supérieur qui transcende l'individu et auquel se dernier doit se soumettre. La théorie rousseauiste de la *volonté générale* est dès lors ébranlée. D'autant qu'il la conçoit comme le résultat d'une simple addition des volontés particulières :

« Il s'ensuit de ce qui précède que la volonté générale est toujours droite et tend toujours à l'utilité publique : mais il ne s'ensuit pas que les délibérations du peuple aient toujours la même rectitude. [...] Il y a souvent de la différence entre la volonté de tous et la volonté générale ; celle-ci ne regarde qu'à l'intérêt commun, l'autre regarde à l'intérêt privé, et ce n'est qu'une somme de volontés particulières : mais *ôtez de ces mêmes volontés les plus et les moins qui s'entre-détruisent, reste pour somme des différences la volonté générale.*<sup>6</sup> »

Philippe Nemo estime que Rousseau considère la volonté qu'exprime chacun comme un vecteur à deux composantes : l'amour-propre d'une part et l'amour de soi d'autre part. En les sommant ne resteraient que les composantes « amour de soi » tandis que les composantes « amour-propre » s'annuleraient entre elles ; on pourrait alors obtenir un unique vecteur, que Rousseau présente comme la « volonté générale » [Nemo, 2002, p. 829].

À la lumière du résultat d'impossibilité de Arrow, on peut donc remettre en question la vision simpliste de Rousseau d'une somme vectorielle de volontés particulières qui permettrait d'obtenir une « volonté générale » puisque le théorème de Arrow exclut d'emblée la possibilité d'une opération aussi simple et parfaite. Cela ébranle la vision politique holiste de Rousseau qui, avec les répercussions fâcheuses que l'on sait, proposait de soumettre l'individu à cette vérité qui le domine et le dépasse : la prétendue « volonté générale ». Et l'on ne peut dès lors plus admettre l'opinion très platonicienne — répandue chez des théoriciens du choix

<sup>5</sup>Anglicisme tiré de *holism* : theory that the universe and especially living nature is correctly seen in terms of interacting wholes (as of living organisms) that are more than the mere sum of elementary particles. Définition du Webster.

<sup>6</sup>J.-J. Rousseau, *Du contrat social*, livre II, chapitre III, 1762.



social, comme Laslier [2004a] — qu’une vérité cachée par l’ignorance existerait préalablement au débat et qui adviendrait par le vote<sup>7</sup>.

Quoiqu’il en soit, ce théorème prouve d’une manière plus générale et avec les hypothèses concernées, qu’il n’existe pas de mode de scrutin parfait pour une société démocratique. Comme nous le verrons en effet au chapitre II, le scrutin majoritaire à deux tours ne déroge pas à cette règle et présente donc quelques défauts très gênants.

## I.2 Manipulabilité et vote stratégique

Le théorème de Arrow a stimulé une importante littérature tant il semble puissant. Ce dynamisme a notamment conduit deux chercheurs, Gibbard et Satterthwaite, à prouver — indépendamment — un autre théorème d’impossibilité tout aussi saisissant à partir du travail de Arrow<sup>8</sup>. Leur résultat, que l’on désigne comme le théorème de Gibbard-Satterthwaite, prouve qu’aucun mode de scrutin ne peut garantir que des électeurs ne mentent pas sur leurs préférences, nous le verrons à la section I.2.A. Ce théorème n’épargne aucun mode de scrutin : nous verrons au chapitre II que le vote majoritaire à deux tours n’y échappe pas.

### I.2.A Le théorème de Gibbard-Satterthwaite

Pour illustrer l’idée de manipulabilité, prenons un exemple canonique. Imaginons un scrutin à la pluralité (le candidat recueillant le plus de voix l’emporte) opposant trois candidats  $a$ ,  $b$  et  $c$  ; supposons que les électeurs soient répartis en trois groupes représentant respectivement 46%, 44% et 10% de la population. Leurs préférences sont données dans le tableau I.2.1 et nous prendrons l’habitude de représenter ainsi les préférences d’une population (le *profil de préférence*). Le tableau se lit verticalement : la première colonne signifie que 46% des électeurs préfèrent  $a$  à  $b$  et  $b$  à  $c$ , ce qui en supposant la propriété naturelle de transitivité<sup>9</sup> revient à dire qu’ils préfèrent  $a$  à  $c$  et classent donc les candidats dans l’ordre  $a b c$ .

Supposons que tous les électeurs votent *sincèrement*, c’est-à-dire pour leur candidat préféré. Ainsi 46% votent pour  $a$ , 44% pour  $b$  et 10% pour  $c$ . Dans le cadre

---

<sup>7</sup>Il n’est cependant pas notre propos ici de justifier par quelque option philosophique l’intérêt du vote mais d’en étudier ses modalités.

<sup>8</sup>Pour Gibbard, « Manipulation of Voting Schemes : A General Result », *Econometrica* vol. 41 (1973), pp. 587–601. Pour Satterthwaite, voire la référence Satterthwaite [1975] de la bibliographie.

<sup>9</sup>Pour une définition formalisée de la transitivité, nous renvoyons le lecteur à la sous-section I.3.A.

46%	44%	10%
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>

TAB. I.2.1 – Un exemple de manipulabilité.

d'un scrutin à la pluralité, on voit aisément que *a* est le candidat élu, avec 46% des voix.

Mais si les électeurs connaissent les préférences des autres, alors ils peuvent anticiper ce résultat. Ainsi la troisième frange de la population, qui avait voté pour *c*, peut savoir que c'est *a* qui va être élu, le candidat qu'elle aime le moins. Si ces 10% d'électeurs décident de voter *b* au lieu de *c*, ils font élire *b* (avec 54% des voix) au lieu de *a*. Ils ont donc décidé de ne pas « gâcher » leur vote pour le candidat *c*, qui ne sera de toute façon pas élu, et obtiennent ainsi un meilleur résultat que s'ils avaient voté sincèrement puisqu'ils préfèrent *b* à *a*.

Suivant cet exemple, on dit que le vote à la pluralité est *manipulable*. D'où la définition formalisée :

**Définition** Soit  $X$  l'ensemble des candidats. Soit  $\mathcal{B}(X)$  l'ensemble des préférences sur  $X$  (c'est-à-dire l'ensemble des classements possibles des candidats de  $X$ ). Soit  $\succeq_i$  la préférence sur  $X$  de l'individu  $i$ . Soit  $\mathcal{R}$  un profil de préférence de la population entière et  $\mathcal{R}_{-i}$  le profil de préférence de la population sans l'individu  $i$ . On dit que l'individu  $i$  peut **manipuler** la fonction de choix social  $f$  si :

$$\exists(\succeq'_i) \in \mathcal{B}(X) : f(\succeq'_i \cup \mathcal{R}_{-i}) \succ_i f(\mathcal{R})$$

Ainsi une fonction de choix social est manipulable quand il existe un individu pour lequel, sous un certain profil de préférences, le résultat est strictement meilleur quand celui-ci annonce un préférence  $\succeq'_i$  différente de sa préférence véritable  $\succeq_i$ . Comme l'on suppose que les électeurs sont rationnels, cela revient à dire qu'un tel électeur anticipe le résultat de l'élection selon qu'il vote sincèrement ou *stratégiquement*<sup>10</sup>, et qu'il prévoit que le résultat de son vote stratégique sera meilleur, toutes choses égales par ailleurs. Farquharson [1969] le décrit comme l'élimination des stratégies de vote dominées, c'est-à-dire des façons de voter qui ne donnent pas le meilleur résultat. L'électeur n'est alors pas incité à révéler sa

<sup>10</sup>On appelle vote stratégique le vote d'un électeur qui tient compte des préférences des autres électeurs dans sa manière de voter.

véritable préférence. Notons qu'en aucun cas le fait de mentir sur ses préférences ne peut permettre à des électeurs d'obtenir leur premier choix ; ils doivent toujours se contenter d'un *second-best*.

Inversement, on dit qu'une fonction de choix social est *non-manipulable* lorsque, quel que soit le profil de préférence de la société, aucun individu n'a intérêt à manipuler, c'est-à-dire à voter autrement que selon sa préférence véritable. Le vote stratégique et le vote sincère coïncident, et ce pour tout électeur.

**Théorème de Gibbard-Satterthwaite (1973-1975)** *Si il y a au moins trois candidats, toute fonction de choix social universelle, surjective<sup>11</sup> et non-manipulable est dictatoriale.*

En fait l'universalité, la non-manipulabilité et la non-dictature sont ici des conditions incompatibles. Comme il est inadmissible d'avoir un mode de scrutin dictatorial dans une démocratie, ce théorème signifie donc que pour une élection entre trois candidats ou plus, il est possible que des électeurs ne révèlent pas leurs véritables préférences<sup>12</sup>. Qu'à cela ne tienne, on pourrait peut-être imaginer une procédure de vote qui permette de reconstituer, à partir des avis émis, la véritable préférence des électeurs. Impossible d'après le principe de révélation de Gibbard<sup>13</sup> : s'il existait une telle règle « indirecte » de vote, alors il existerait une règle de vote non-manipulable, ce qui est contredit par le théorème. Il faut donc renoncer, sauf en changeant les hypothèses (cf. sous-section I.3.B), à obtenir à coup sûr les véritables préférences des électeurs. Plus exactement, si une élection oppose plus de deux candidats, on ne peut être certain que les préférences exprimées par les électeurs soient sincères. Comment dès lors pouvoir en tirer une quelconque leçon pour les décisions à prendre ?

### I.2.B Le sens du vote pour l'électeur

D'une manière générale, le but d'une élection est de recueillir l'avis d'une population et de s'en servir pour prendre une décision qui concerne cette population. Le fait même d'organiser une élection implique la reconnaissance d'une certaine

---

<sup>11</sup>Cela signifie simplement que pour tout candidat, il existe un profil de préférence tel que la fonction de choix social déclare ce candidat vainqueur. Ceci ne réduit pas beaucoup les fonctions concernées par le théorème puisqu'il suffit d'envisager celles qui, lorsque toute la population préfère le même candidat, donne ce candidat vainqueur.

<sup>12</sup>Gärdenfors [1976] prouve également que toute fonction de choix social anonyme, neutre et satisfaisant le critère de Condorcet (défini à la sous-section II.3.A) est manipulable. Ceci ne concerne pas les élections en France, qui ne vérifient pas le critère de Condorcet.

<sup>13</sup>Gibbard, *op. cit.*

légitimité de la population à donner son avis. Le théorème de Arrow nous montre que le passage des avis de chaque individu à l'avis d'une population était problématique et remettait en cause le concept même de volonté générale. Nous venons désormais de voir que le biais peut également concerner les avis de chaque individu s'ils sont émis.

Appelons « réussite » le fait que le vote stratégique aboutisse à un résultat différent du vote sincère. Il est difficile de dire si la réussite d'un vote stratégique donnera un résultat « meilleur » ou « pire » que le vote sincère. Si l'on reprend l'exemple donné dans le tableau [I.2.1](#), on constate que le vote stratégique a permis aux 10% préférant le candidat *c* et aux 44% préférant le candidat *b* de s'en sortir avec un meilleur résultat. Mais cela a également frustré 46% de la population, puisque *a* aurait été élu si tout le monde avait voté sincèrement. On aurait donc tendance à dire que *dans l'ensemble*, la manipulation du scrutin a été bénéfique. Ce serait conclure trop vite. Comment en effet mesurer le gain ou la perte de bien-être dans les deux cas ? Peut-on affirmer qu'obtenir son premier choix plutôt que son second apporte exactement le même bénéfice qu'obtenir son troisième choix à la place de son deuxième choix ? Il est très difficile, voire impossible, d'obtenir une intensité des préférences<sup>14</sup>. Car il n'est pas évident d'obtenir une information quantifiée sur les préférences d'un individu. Imaginons même que l'on demande à un individu de répartir 100 points entre quatre candidats, qui reçoivent respectivement 45, 35, 15 et 5 points. Cela ne prouve aucunement que l'individu préfère le premier candidat trois fois plus que le troisième (si tant est que cela ait un sens de préférer « trois fois plus »). Pour en revenir à notre exemple, il nous est donc impossible de dire précisément si le vote stratégique se révèle bénéfique ou non pour une population entière. (C'est justement le cœur du débat autour du vote que de déterminer ce qui est le mieux pour une population !)

Dès lors, est-il dommageable qu'un mode de scrutin soit manipulable ? Rappelons d'abord que la manipulabilité d'un mode de scrutin n'implique pas nécessairement que certains électeurs voteront stratégiquement. C'est une possibilité qui dépend des préférences de l'ensemble de l'électorat. Par exemple, le scrutin à la pluralité est manipulable, comme nous l'avons montré plus haut ; mais si chaque électeur considère le candidat *a* comme son préféré, alors aucun électeur n'a intérêt à voter différemment de sa préférence sincère.

Cela étant dit, si l'on considère que le rôle d'un vote est avant toute chose de recueillir les avis de la population, alors la manipulabilité d'un mode de scrutin est

---

<sup>14</sup>Pour une brève distinction entre préférences ordinales et cardinales, cf. [I.3.A](#).

fâcheuse, car elle conduit à une prise de décision à partir d'informations faussées. Il nous est en effet impossible, à partir du simple résultat d'une élection de savoir dans quelle mesure le vote a été stratégique. Il semble pourtant légitime de pouvoir s'assurer que tous les électeurs ont la même opportunité d'exprimer leur réelle préférence. D'autant que la manipulabilité fait appel à la réflexion stratégique de chacun, et face à laquelle nous ne sommes pas tous de compétence égale. Ainsi l'a fait en son temps remarquer Charles Dodgson (alias Lewis Carroll) en considérant que le vote stratégique faisait de l'élection « more as a game of skill than a real test of the wishes of the electors ». Il faudrait alors une véritable éducation civique :

« As my own opinion is that it is better for elections to be decided according to the wish of the majority than of those who happen to have most skill in the game, I think it desirable that all should know the rule by which this game may be won. » (C. Dodgson)

Mais il n'est sans doute pas aisé d'éduquer tout le monde aux considérations stratégiques du vote, même si le « vote utile » est souvent perçu de manière spontanée.

Dans notre introduction, nous avons évoqué le danger que pouvaient représenter de trop fortes hypothèses. Tâchons ici d'y faire attention et n'oublions pas que l'électeur réel n'est pas seulement un maximisateur de bien-être. Le fait ou non de voter stratégiquement suppose de connaître les préférences de tous les électeurs ; cela suppose aussi que chaque électeur est rationnel et ne cherche qu'à faire élire le meilleur candidat à ses yeux. Mais le vote peut être aussi considéré comme une communication entre un électeur et son gouvernement. Surtout dans un grand pays, l'électeur, dont la voix a marginalement peu de poids, peut choisir de sacrifier son pouvoir électoral et d'utiliser son vote comme message. Il indique alors sa véritable préférence — ou pire encore : vote pour un parti qui n'est ni son préféré, ni celui correspondant à un vote stratégique. Ce qu'on appelle parfois « vote contestataire » est une façon de communiquer son mécontentement. Au lieu de favoriser l'avènement d'un candidat qui a des chances de réussir, l'électeur peut délibérément voter pour un candidat se positionnant en contestataire du gouvernement en place ou des grands candidats, même si ce candidat n'est pas son favori<sup>15</sup>.

Pour qu'un électeur puisse voter stratégiquement, on a jusqu'ici supposé qu'il avait une information parfaite : il connaît exactement les préférences de tous les électeurs, et peut alors anticiper le résultat d'un vote sincère général. L'hypothèse est bien sûr irréaliste dans un pays de 40 millions d'électeurs comme la France. De

---

<sup>15</sup>C'est ainsi qu'on a pu expliquer le score du Front National aux élections présidentielles de 2002. La régularité des scores de ce parti rend néanmoins l'argument douteux.

ce fait, certains ont pu critiquer la réalité du vote stratégique au niveau d'un pays, du fait justement de la variété des préférences et la difficulté de les quantifier. Dans cette situation, il est difficile pour un électeur de savoir si son vote sera *pivotal*, c'est-à-dire déterminant ou non<sup>16</sup>.

Néanmoins, l'électeur peut avoir une information partielle (un *signal*) sur l'état des préférences. Il peut connaître approximativement l'état des préférences en s'appuyant sur des sondages et des habitudes politiques. D'où le rôle crucial que jouent les sondages, comme on le verra dans le cas spécifique du scrutin majoritaire à la section II.4.

## I.3 Considérations sur les préférences des électeurs

### I.3.A Complétude et transitivité

Depuis Arrow [1951], la plupart des théories dans le domaine du choix social reposent sur deux axiomes quant aux préférences des électeurs concernant un ensemble de candidats. Ces axiomes sont nécessaires si l'on veut utiliser des préférences ordinales (qui s'appuient sur un ordre relatif des alternatives). Au contraire, les préférences cardinales consistent à affecter à chaque résultat possible de l'élection une utilité (typiquement utilité espérée à la Von Neumann-Morgenstern<sup>17</sup>); cette utilité sert ensuite à chaque électeur pour comparer les différentes alternatives. En l'absence de référence externe comme celle-ci dans le cas de préférences ordinales, les deux axiomes suivants assurent à la préférence ( $\succeq_i$ ) une cohérence logique semblable à la comparaison de chiffres réels.

**Axiome I (Complétude)** *Pour tous candidats  $x$  et  $y$  différents de l'ensemble des candidats  $X$  et pour tout individu  $i$  :*

$$x \succeq_i y \quad \text{ou} \quad y \succeq_i x$$

*Les deux cas pouvant être simultanément réalisés (indifférence).*

On suppose donc qu'un électeur est capable de comparer deux candidats, quels qu'ils soient. Ainsi l'électeur a toujours un avis, même si cet avis peut être l'in-

<sup>16</sup>Randall REBACK, « The Existence of Strategic (Pivotal) Voting », Barnard College, Columbia University, working paper 04-01.

<sup>17</sup>cf. J. VON NEUMANN et O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*. Éd. 1953, Princeton, NJ : Princeton University Press.

différence. On peut ajouter à cet axiome la réflexivité en supprimant l'hypothèse  $x \neq y$  ; on obtient alors dans le cas  $x = y$  :  $\forall x \in X, x \succeq_i x$ .

**Axiome II (Transitivité)** *Pour tous candidats  $x, y$  et  $z$  de l'ensemble  $X$  des candidats, et pour tout individu  $i$  :*

$$[x \succeq_i y \text{ et } y \succeq_i z] \Rightarrow x \succeq_i z$$

Cet axiome ne paraît pas très contraignant. Il semble en effet normal qu'un individu qui préfère le café au thé et le thé au chocolat, préfère également le café au chocolat. On fait parfois référence à cet axiome sous le terme de *cohérence*.

On appelle *préordre total* une relation réflexive construite selon les axiomes I et II. Cette conception de la préférence individuelle est à la base de la théorie du choix social et les paradoxes que nous avons vus s'y appuient. On peut légitimement se demander si cette conception est réaliste, surtout quand de nombreux candidats se présentent à une élection : ce fut par exemple le cas aux élections présidentielles de 2002, qui opposèrent seize candidats ! Dès lors il est peut-être exagéré de supposer que chaque électeur est capable de tous les ranger. Il a probablement une vision assez distincte de sa tête de préférence et une vision plutôt floue de sa queue de préférence. Est-ce vraiment un problème ? Tout dépend du système électoral considéré. Dans un scrutin uninominal, comme en France, l'électeur ne doit inscrire le nom que d'un seul candidat. Mais s'il désire voter stratégiquement, il faut en général qu'il connaisse au moins ses deuxième et troisième choix, pour y trouver un vainqueur potentiel. C'est une exigence limitée. En revanche, certains modes de scrutins nationaux exigent des électeurs qu'ils indiquent leur ordre complet de préférence des candidats ; c'est le cas en Irlande et en Australie, deux pays qui utilisent le vote préférentiel (ou vote alternatif). Là encore le problème est moindre, puisque dans ces pays, le nombre de candidats est traditionnellement plus limité, du fait d'un nombre de partis assez faible. (C'est peut-être d'ailleurs une conséquence de ce mode de scrutin<sup>18</sup>.)

Pour la préférence individuelle, l'exigence d'un préordre complet est nécessaire pour repérer les paradoxes. Dans la pratique du vote, peu de procédures exigent que l'électeur dévoile sa préférence complète.

---

<sup>18</sup>Douglas RAE, *The Political Consequences of Electoral Laws*, New Haven : Yale University Press, 2<sup>e</sup> édition, 1971.

### I.3.B Universalité ou domaine restreint ?

Les deux théorèmes d'impossibilité que nous avons vus jusqu'ici posaient tous deux comme axiome l'universalité de la fonction de choix social, c'est-à-dire le fait qu'elle accepte n'importe quelle préférence individuelle (répondant toujours aux axiomes I et II). Pour trouver une parade à l'implacable force de ces deux théorèmes, plusieurs théoriciens se sont intéressés à la condition d'universalité. Sans elle, les résultats d'impossibilité sont levés.

Nous avons déjà expliqué pourquoi il est normal, dans une société démocratique, de ne censurer *a priori* aucune préférence. Mais autoriser toutes les préférences ne signifie pas qu'elles existent effectivement. Toutefois, la France compte actuellement plus 40 millions d'électeurs. Quand par exemple neuf candidats se présentent à une élection, comme aux présidentielles de 1995, il existe  $9! = 362880$  préférences distinctes, c'est-à-dire de classements possibles des candidats. De manière peu scrupuleuse, on peut donc supposer qu'elles sont toutes représentées dans la population, puisque le nombre d'électeurs est bien supérieur. Mais quand le nombre de candidats est de 16, le nombre de préférences possibles est alors de 20.922.789.888.000. Dès lors, l'argument statistique n'est plus valable.

En revanche, on peut se demander si toutes les préférences sont cohérentes d'un point de vue politique. Pour reprendre l'exemple des présidentielles de 1995, on peut se demander s'il existait des candidats ayant la préférence : Hue  $\succeq$  Chirac  $\succeq$  Laguillier  $\succeq$  Jospin  $\succeq$  Balladur  $\succeq$  Voynet  $\succeq$  De Villiers  $\succeq$  Le Pen  $\succeq$  Cheminade. Les électeurs ont tendance au contraire à rapprocher dans leur préférence les candidats de tendance politique similaire. Partant de ce raisonnement, on a proposé une nouvelle hypothèse concernant les préférences des électeurs : l'*unimodalité*, qui s'inscrit dans le cadre spatial du vote. L'idée du vote spatial est de considérer les programmes/candidats électoraux dans un espace à plusieurs dimensions, chaque dimension représentant un aspect quantifiable du programme — par exemple, le taux d'imposition proposé, etc. Chaque électeur est caractérisé par un programme idéal, c'est-à-dire un point de l'espace multi-dimensionnel. De même pour chaque candidat. Pour un électeur donné, plus un candidat est près de son programme idéal, mieux il est classé dans ses préférences. On utilise donc une distance sur l'espace multi-dimensionnel pour comparer les différents candidats afin que chaque électeur puisse donner ses préférences<sup>19</sup>.

<sup>19</sup>Il ne s'agit toutefois pas d'une préférence cardinale mais plutôt d'un critère cardinal pour obtenir un classement, donc une préférence ordinale. Il serait intéressant de vérifier empiriquement la pertinence des modèles spatiaux et la fréquente hypothèse d'unimodalité ; le vote spatial est un modèle



L'hypothèse d'unimodalité s'inscrit dans ce cadre théorique en considérant un espace de dimension 1. En France, on utilise typiquement une représentation linéaire de la vie politique selon un axe gauche-droite. On considère que l'électeur a un idéal sous forme de point : il n'existe aucun point préféré à celui-ci, et plus on s'éloigne de ce point — dans un sens ou dans l'autre — plus le candidat descend dans les préférences de l'électeur.

Sur l'axe gauche-droite, notons  $a < b$  pour signifier que le candidat  $a$  se situe politiquement à gauche de  $b$ .

**Définition** On dit que la préférence de l'électeur  $i$  dont le point idéal est  $m_i^*$  est **unimodale** si, pour tout candidat  $x$  et  $y$  :

$$x < y \leq m_i^* \Rightarrow y \succ_i x$$

$$m_i^* \geq x > y \Rightarrow x \succ_i y$$

Ainsi, quand deux candidats sont à gauche du point idéal (le *mode*) de l'électeur, celui-ci préfère le moins éloigné. Et *vice versa* à droite. Sur un plan politique, ceci permet d'obtenir une préférence politiquement cohérente et d'éviter le cas peu vraisemblable de notre exemple. En supprimant les préférences aberrantes, l'hypothèse de préférence unimodale est incompatible avec la condition d'universalité. En effet, pour un ordre donné de candidat, il existe des préférences « interdites ».

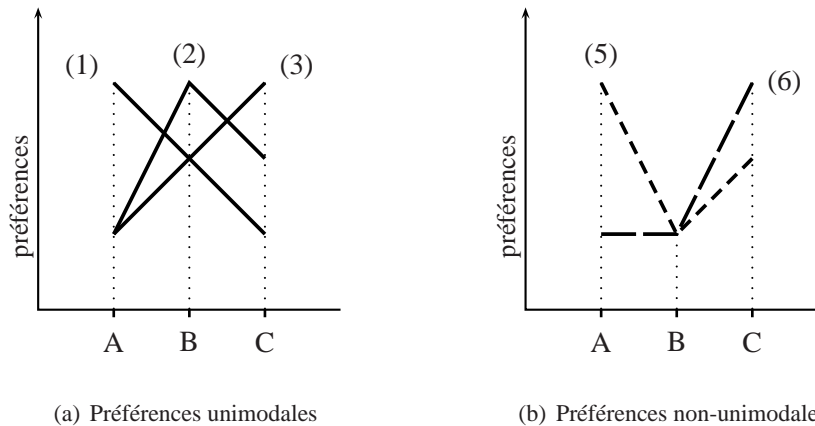


FIG. I.1 – Exemples de préférences unimodales et non-unimodales.

abondamment utilisé dans la littérature car il permet d'obtenir des résultats assez précis. Les travaux expérimentaux de validation de ces modèles semblent rares.

Sur la figure I.1(a), les préférences (1), (2) et (3) montrent les préférences d'électeurs ayant respectivement leur mode en  $A$ ,  $B$  et  $C$ . La figure I.1(b) montre les préférences (5) et (6) qui ne sont pas unimodales. Dans le cas de (5) par exemple, on a  $B < C$  et pourtant  $B \succ C$ . D'une manière générale, quand il y a  $n$  candidats, l'hypothèse d'unimodalité ne permet d'obtenir que  $1 + \frac{n(n-1)}{2}$  préférences distinctes au lieu de  $(n!)$ . Notons au passage que l'unimodalité va à l'encontre de l'axiome I de complétude des préférences individuelles. Si l'on s'en tient aux préférences ordinales (sans référence avec une mesure d'utilité), un électeur ne peut en effet comparer deux candidats qui seraient de part et d'autre de son point idéal.

L'intérêt de l'hypothèse d'unimodalité est qu'elle invalide les résultats de Arrow et de Gibbard et Satterthwaite. Arrow [1951] lui-même indique que la restriction d'unimodalité sur les préférences des électeurs crée un domaine restreint sur lequel le théorème d'impossibilité ne s'applique plus. On peut en effet vérifier que le vote à la pluralité par exemple, remplit bien les conditions 2 à 4 du théorème et résulte, si l'on remplace l'universalité par l'unimodalité, en une préférence collective complète et transitive<sup>20</sup>.

De même, le résultat fort du théorème de Gibbard et Satterthwaite s'obtient au prix de la lourde hypothèse d'universalité. Mais si l'on restreint le domaine des préférences aux préférences unimodales, le résultat d'impossibilité ne tient plus. Il existe alors des modes de scrutin non-manipulables et non-dictatoriaux. Moulin [1980] va même jusqu'à caractériser précisément de telles fonctions de choix social. De cette caractérisation, Barberà [2001] généralise l'existence de telles fonctions à un cadre multi-dimensionnel.

Le problème de l'unimodalité est qu'elle nécessite une référence collective exogène : un ordre fixe des candidats. Cela suppose donc que la société s'accorde sur une vision de la vie politique du pays.

« Assuming a single political dimension, the fact that a profile,  $D$ , is single-peaked means the voters have a common view of the political situation, although they may differ widely on their judgments. Person  $i$  may choose  $D_i = xyz$ , and person  $j$  may choose  $D_j = zyx$ ; yet they agree that  $x$  is at one end of the scale,  $z$  at the other, and  $y$  in the

---

<sup>20</sup>Cette restriction avait déjà été envisagée en 1948 par Duncan BLACK dans « On the Rationale of Group Decision-making » *Journal of Political Economy* vol.56. Black montre que l'unimodalité suffit à garantir l'existence d'un électeur médian, vainqueur de Condorcet (défini à la section II.2.A.1), et donc la possibilité d'agréger les préférences en un préordre collectif par le vote majoritaire. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de l'électeur médian*.

middle, which means they agree entirely on how the political spectrum is arranged. » [Riker, 1982, p.126]

Il n'est pas toujours évident de déterminer un ordre précis pour les candidats. En France, l'axe gauche-droite n'est pas forcément pertinent, comme le montre le résultat de l'expérience électorale de Laslier et Van Der Straeten [2004] à la sous-section III.2.B.2 : certains candidats sont difficiles à placer sur un axe gauche-droite. Par ailleurs, les candidats sont difficiles à placer sur un axe quand ils sont proches politiquement, notamment quand ils sont originaires de la même formation : l'exemple de Chirac et Balladur en 1995 est remarquable de ce point de vue, tant il est difficile de les départager sur la dimension politique, du moins du point de vue idéologique. Un troisième obstacle s'ajoute à cela : convenir d'une disposition politique générale est d'autant moins aisé que les candidats utilisent stratégiquement l'ambiguïté dans la compétition électorale<sup>21</sup>. Dans ce cadre, la restriction d'unimodalité, quoique théoriquement très intéressante, est difficilement applicable à la vie politique réelle. Les vérifications expérimentales sont rares.

D'autres restrictions sur les préférences ont été identifiées, qui garantissent une préférence collective transitive<sup>22</sup>. Sen propose par exemple la condition de valeur restreinte quand il y a trois candidats au vote par paires<sup>23</sup>. Il suffit qu'un candidat n'occupe pas toutes les places (première, deuxième et troisième) dans les préférences des électeurs, pour garantir un résultat collectif non cyclique.

Plus sophistiqué, Igersheim [2003] a proposé un mécanisme (le MMP pour Mécanisme de Modification des Préférences) pour corriger les « préférences individuelles jugées contestables par la société ». Ce mécanisme très élégant corrige de manière ciblée les préférences des individus jugées indésirables ; ceci n'est pas laissé à la discrétion d'un décideur mais suit une définition très précise (définition 2 de l'article). Une fois ces préférences identifiées, elles sont corrigées de manière itérative jusqu'à ce que l'on puisse parvenir à un choix social. Le MMP est très élégant en ce qu'il permet de corriger certaines préférences qui ne sont pas en accord avec les valeurs de la société, tout en minimisant les changements nécessaires. Là encore, déterminer ce que signifie de ne pas être accord avec les valeurs de la société serait trop flou. Igersheim s'appuie sur un processus très précis. Tout cela

---

<sup>21</sup>cf. Kenneth A. SHEPSLE, 1972 : « The strategy of ambiguity : Uncertainty and electoral competition », *American Political Science Review*, vol. 66, pp. 555–568. Benjamin I. PAGE, 1976 : « The theory of political ambiguity », *American Political Science Review*, vol.70, pp. 742–752. Voir aussi ? et  $\rho(A, B)$  Laslier [2003a].

<sup>22</sup>Peter Fishburn en propose une analyse exhaustive dans *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, Princeton, 1973.

<sup>23</sup>Amartya SEN, *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day, San Francisco, 1970.

permet finalement à l'individu de conserver une certaine suprématie sur son avis et donc de préserver sa liberté individuelle. En soi, MMP n'est pas une réponse au paradoxe de Gibbard et Satterthwaite, mais au paradoxe de Gibbard<sup>24</sup> sur les libertés individuelles.

Il serait intéressant d'étudier les implications de ce mécanisme sur les deux grands théorèmes que nous avons mentionnés. De manière intuitive, il semble que ces résultats paradoxaux, surtout celui de Arrow, apparaissent d'autant plus que les préférences sont hétérogènes. La restriction d'unimodalité montre en effet qu'en réduisant le domaine des préférences, on peut les éviter. Le MMP a un avantage certain : il n'impose pas de structure qui interdit *a priori* certaines préférences — peu vraisemblables, certes, mais néanmoins existantes.

Nous avons étudié dans ce chapitre deux résultats très importants de la théorie du choix social : le théorème de Arrow et le théorème de Gibbard-Satterthwaite. Schématiquement, ils nous indiquent qu'aucun mode de scrutin n'est parfait. Leur portée universelle ne peut être invalidée qu'au prix d'une restriction des préférences et à condition que les électeurs soient unanimes sur la position respective des candidats dans l'espace politique.

Nous savons désormais que les modes de scrutin français ne seront donc pas exempts de reproches. L'objet du chapitre II est d'étudier les problèmes spécifiques que pose le scrutin majoritaire et notamment sa « variante » française : le scrutin majoritaire à deux tours.

---

<sup>24</sup>Allan GIBBARD, 1974 : « A Pareto-Consistent Libertarian Claim », *Journal of Economic Theory*, vol. 7, pp.338-410.

## Chapitre II

# Le scrutin à deux tours : une spécialité française

En France, la multitude des dispositions électorales a de quoi donner le vertige, avec plusieurs types de découpage, des modes de scrutin différents selon les élections, et parfois pour une même élection selon la circonscription. Cependant, les modes de scrutin de la v<sup>e</sup> République sont presque tous de nature majoritaire. Seules les élections municipales, une partie des sénatoriales et les européennes sont de nature proportionnelle. Les élections présidentielles, législatives, cantonales sont des scrutins majoritaires. Les élections régionales se situent entre les deux.

Le scrutin majoritaire, qui accorde la victoire au candidat recevant le plus de voix, est un mode de scrutin naturel et il n'est pas étonnant qu'il soit aussi répandu chronologiquement et géographiquement. Historiquement, il fut sans doute le premier à être utilisé et également le premier à être étudié de manière systématique, par Condorcet et Borda notamment. Nous ferons ici référence à cette étude et tenterons de comprendre les problèmes du mode de scrutin à deux tours, un système électoral que la v<sup>e</sup> République a profondément ancré en France.

### II.1 L'évidence du scrutin majoritaire

Le vote à la majorité semble le mode de scrutin le plus spontané. Sous l'Antiquité grecque, lorsqu'on ne tirait pas au sort un citoyen pour occuper un poste, on le désignait à la majorité. Ce mode de scrutin a traversé les siècles et ce n'est que récemment qu'on lui a trouvé des concurrents : procédures de Condorcet et de

Borda au XVIII<sup>e</sup> siècle, de nombreuses méthodes proposées par Charles Dodgson et celle de Nanson au XIX<sup>e</sup> siècle, proportionnelle depuis le début du XX<sup>e</sup> siècle, etc. Si aucune de ces propositions n'a vraiment remplacé le scrutin majoritaire, c'est que le principe de ce dernier est très intuitif : celui qui a le plus de voix gagne. Simple et incontestable, il ne donne lieu qu'à des calculs simples et peut être mis en place facilement. Le décompte des voix ne requiert que des additions. Ce mode de scrutin est donc facilement compris de tous.

Cette « évidence » du scrutin majoritaire sera confirmée d'un point de vue théorique au XX<sup>e</sup> siècle. En plus de son résultat très connu, Arrow [1951] propose aussi un théorème de *possibilité* : quand l'élection n'oppose que deux candidats, le scrutin majoritaire répond aux conditions 1 à 4 (évoquées à la section I.1). May, quant à lui, reconnaît au scrutin majoritaire un statut tout particulier<sup>1</sup>, qu'il démontrera dans son théorème :

**Théorème de May (1952)** *S'il y a seulement deux candidats, le scrutin majoritaire est la seule fonction de choix social vérifiant :*

1. *l'anonymat,*
2. *la neutralité,*
3. *la monotonie.*

Un mode de scrutin anonyme est un mode de scrutin qui ne distingue pas les électeurs : si deux ou plusieurs électeurs échangent leur bulletin de vote, le résultat ne change pas. L'anonymat au sens théorique permet ici l'anonymat de l'électeur puisque ce dernier n'a pas besoin d'inscrire son nom sur son bulletin. C'est une propriété indispensable car elle garantit que l'électeur ne subira pas de pressions au moment du vote. Il ne peut en effet y avoir de représailles contre un électeur à cause de son vote, si l'on ne peut déterminer qui a voté quoi. Par ailleurs, cette propriété d'anonymat permet également d'écarter tout dictateur, au sens de la condition 4 de Arrow. On ne peut en effet donner de prérogative à un électeur particulier sans savoir à qui est chaque bulletin. C'est pour ces raisons, pour mettre les électeurs sur un pied d'égalité, que l'article 21 de la Déclaration universelle des droits de l'Homme de 1948 stipule que les élections doivent se tenir « au suffrage universel égal et au vote secret ».

La neutralité d'un mode de scrutin signifie que toutes les options sont traitées de la même manière : aucun candidat, aucune option ne bénéficie d'un statut par-

---

<sup>1</sup> Kenneth O. MAY, 1952 : « A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision », *Econometrica* vol. 20, pp. 680–684.

ticulier. Ainsi la prééminence du *statu quo*, que l'on retrouve fréquemment dans le vote de textes par des assemblées, viole cette condition ; nous en verrons l'intérêt plus tard. La neutralité est néanmoins indispensable pour que tous les candidats soient sur un pied d'égalité et que chacun puisse « accéder, dans des conditions d'égalité, aux fonctions publiques de son pays » (art. 21 de la DUDH).

La monotonie<sup>2</sup>, qu'on peut appeler *réponse positive* dans le cas de deux candidats, caractérise les fonctions de choix social par lesquelles un candidat ne peut que stagner ou progresser dans la préférence collective s'il progresse dans les préférences individuelles de tout ou partie des électeurs. Autrement formulé : un candidat ne doit pas pâtir de son succès. Dans le cas d'un vote majoritaire entre deux candidats, il est évident que plus les électeurs soutiennent un candidat, plus celui-ci reçoit de voix et « l'emporte » sur son adversaire.

En somme, quand il n'y a que deux candidats ou propositions à départager, le vote à la majorité est parfait. Il vérifie toutes les propriétés que l'on pourrait attendre d'un mode de scrutin dans un pays démocratique. En revanche, et comme nous l'avons vu avec le théorème de Arrow [1951], il n'en est plus du tout de même quand il y a trois candidats ou plus. Ce problème avait déjà été détecté par le philosophe et mathématicien français Condorcet au XVIII<sup>e</sup> siècle.

## II.2 Le paradoxe de Condorcet

C'est historiquement le premier exemple de paradoxe de vote. Condorcet montre comment le vote majoritaire peut conduire à une préférence collective non-transitive, en particulier cyclique.

### II.2.A La difficile agrégation

#### II.2.A.1 L'exemple original

Dans son *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* (1785), le Marquis de Condorcet montre que le vote à la pluralité, c'est-à-dire le vote à la majorité simple, ne donne pas toujours des résultats satisfaisants lorsque les votants doivent choisir entre trois options ou

---

<sup>2</sup>Pour une définition formalisée, cf. sous-section II.3.B.

plus<sup>3</sup>. Il se peut dans certains cas que le résultat de l'élection ne corresponde pas aux souhaits des électeurs :

« Cela posé, il est aisé de voir d'abord que la manière employée dans les élections ordinaires est défectueuse. En effet, chaque Votant se borne à nommer celui qu'il préfère : ainsi dans l'exemple de trois Candidats, celui qui vote pour *A*, n'énonce pas son vœu sur la préférence entre *B* & *C*, & ainsi des autres. Or, il peut résulter de cette manière de voter une décision réellement contraire à la pluralité. »

Ce défaut du scrutin majoritaire (que l'on nomme parfois paradoxe de Borda) est étudié dans la section II.3.A sur le critère de Condorcet. À partir de là, Condorcet propose que les électeurs donnent leurs préférences complètes. Il montre alors que dans ce cas, l'agrégation des préférences par le vote peut donner un résultat étrange.

23	17	2	10	8
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>
<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>

TAB. II.2.1 – L'exemple original de Condorcet

Le tableau II.2.1 présente de manière synthétique l'exemple qu'utilise Condorcet. Il se lit en colonne : la première signifie que 23 électeurs préfèrent *A* à *B* et *B* à *C*. Avec ce profil de préférence, le vote à la pluralité désigne *A* vainqueur avec 23 voix (contre resp. 19 et 18 pour *B* et *C*). Condorcet propose alors d'effectuer les comparaisons des candidats par paire, c'est-à-dire de comparer (à la majorité simple toujours) *A* et *B*, *A* et *C*, *B* et *C*. Le lecteur pourra, en comptant le nombre d'électeurs plaçant dans leurs préférences *A* plus haut que *B*, *A* plus haut que *C* et *B* plus haut que *C*, aisément vérifier le résultat qu'obtient Condorcet :

<sup>3</sup> Chronologiquement, il semble que Condorcet ait été précédé en cela par Borda [1784]. En 1770, ce dernier proposait déjà une solution aux problèmes de la règle majoritaire avec la fameuse règle de Borda. Il s'agit, pour chaque candidat, de classer les  $m$  candidats selon sa préférence. Un candidat classé à la place  $k$  reçoit alors  $a + b(m - k)$  points. « Les quantités  $a$  &  $b$ , peuvent être tout ce qu'on voudra, on pourra donc supposer  $a = 1$  &  $b = 1$  ». Chaque candidat reçoit alors  $m$  points à chaque fois qu'il est classé en première place,  $m - 1$  lorsqu'il est classé à la deuxième, etc. jusqu'à la  $m^{\text{ième}}$  place pour laquelle il ne reçoit qu'un point. Le candidat élu est celui qui a reçu le plus de points. Exposée devant l'Académie des Sciences en juin 1770, cette méthode ne sera publiée qu'en 1784 dans « Mémoire sur les élections au scrutin », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour 1781*. Il y critique déjà la difficulté pratique d'effectuer les comparaisons par paires entre tous les candidats, cette façon étant depuis appelée *procédure de Condorcet*.



« Le système qui obtient la pluralité sera donc composé des propositions,

$A$  vaut mieux que  $B$ ,

$C$  vaut mieux que  $A$ ,

$B$  vaut mieux que  $C$ .

Ce système est le troisième, & un de ceux qui impliquent contradiction. » [Condorcet, 1785, p. lxj]

Alors avec le vote à la pluralité, on obtient que  $A \gg B$  et  $B \gg C$  et  $C \gg A$ , ce qu'on écrit de manière synthétique :  $A \gg B \gg C \gg A$  (où le symbole  $\gg$  désigne la préférence collective). On appelle cette situation *un cycle de Condorcet*, c'est-à-dire un sous-ensemble  $\mathcal{N}'$  des candidats tel que pour tout candidat  $y$  de  $\mathcal{N}'$ , il existe un candidat  $x$  de  $\mathcal{N}'$  tel que  $x \gg y$ .

**Définition (Vainqueur de Condorcet)** *Une alternative qui bat toutes les autres en duel est appelée vainqueur de Condorcet (VC). Un candidat  $x$  de  $X$  est VC si :*

$$\forall y \in X \setminus \{x\}, \quad x \gg y$$

S'il existe un vainqueur de Condorcet, alors les premiers candidats dans la préférence sociale ne peuvent former de cycle. Un cycle peut cependant exister parmi les candidats moins bien classés<sup>4</sup>. On pourrait arguer que cela n'en est pas moins dommageable. En réalité, le but d'un vote, plus que d'obtenir une préférence sociale totale c'est-à-dire le classement complet des préférences de la société, est d'obtenir un choix entre plusieurs alternatives ou candidats. À la limite, s'il existe une alternative largement en tête et que les autres sont toutes *ex æquo*, ce n'est pas gênant du moment qu'il s'agit de n'élire qu'un candidat. Le but du vote n'est jamais, du moins au niveau politique, de déterminer la pire des alternatives, mais toujours la meilleure. Un cycle n'est donc problématique que lorsqu'il concerne le « haut » des préférences, ce qu'on appelle *top cycle* en anglais.

Donc dans ce cas, on ne peut pas dire qu'il existe de véritable « vainqueur », comme le fait remarquer Nurmi [1987] en termes limpides :

« There is no socially best alternative in this situation. No matter which of the alternatives is picked the majority of voters would prefer another alternative to it. »

<sup>4</sup>cf. l'exemple de Ordeshook [1986] p. 85.

Nurmi évoque ici le cas d'un cycle total, c'est-à-dire un cycle contenant tous les candidats, mais souvenons-nous que des cycles partiels sont possibles et non moins problématiques. Pour reprendre l'exemple de Condorcet, choisir A, qui est la vainqueur à la pluralité, revient à frustrer une majorité de l'électorat, celle précisément qui lui préfère le candidat C soit 35 des 60 électeurs.

Ainsi, la procédure de Condorcet, consistant à comparer les candidats deux par deux à la majorité simple n'apporte pas de solution à cette situation. C'est pourquoi Borda propose une méthode d'« *élection par ordre de mérite* » (cf. la note 3 p. 32). La solution de Borda garantit en effet que la préférence collective déduite des préférences de chaque individu est transitive, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de cycle dans la préférence collective.

### II.2.A.2 L'organisation de l'élection

Comme nous venons de le voir, lorsqu'une élection oppose trois candidats ou plus et qu'il n'existe pas de vainqueur de Condorcet, le résultat du scrutin à la pluralité est ambigu. Une façon qui permet de s'en sortir est le *vote séquentiel*. Il consiste à procéder par étape, en comparant d'abord deux candidats. Le vainqueur de ce duel est alors comparé à un troisième, et ainsi de suite. Comme le vote majoritaire se comporte très bien quand il n'oppose que deux candidats, on est assuré de n'avoir aucun problème à chaque étape du vote.

Farquharson [1969] compare cette façon de procéder avec le scrutin à la pluralité en s'appuyant sur un texte de Pline le Jeune. Dans cette lettre adressée à Titus Ariston, Pline raconte comment les esclaves d'Afranius Dexter, qui étaient soupçonnés du meurtre de leur maître, furent interrogés par le sénat à ce sujet :

« Après qu'ils furent interrogés, un certain sénateur (son nom importe peu, mais si tu veux savoir, il s'agissait de moi-même) voulait les acquitter ; un autre proposa qu'ils fussent bannis pour une durée déterminée ; et un troisième qu'ils fussent punis de mort. [...] Pendant ce temps, les sénateurs qui prônaient la peine capitale, et ceux qui proposaient le bannissement, s'assirent côte à côte dans la même partie de la salle : et ainsi par une présente apparence d'unanimité mirent leur réel désaccord de côté. Dès lors, je proposai que l'on votât séparément

pour chacune des trois opinions et que deux d’entre elles ne devaient point, à la faveur d’une courte trêve, s’allier contre la troisième. »<sup>5</sup>

Il s’agit donc de départager trois propositions : l’acquittement (*A*), l’exil (*B*) et la condamnation à mort (*C*). Pline raconte que les partisans de l’exil et de la condamnation sont environ aussi nombreux et ceux en faveur de l’acquittement légèrement supérieurs. Considérons la répartition suivante : 34% des voix pour *A*, 33% pour *B* et 33% pour *C*. Voyant que deux parties forment une coalition pour voter, Pline propose alors un vote à la pluralité : il sait qu’il va perdre sinon. Au-delà de l’aspect stratégique du vote en assemblée, cet exemple montre que le vote séquentiel et le vote à la pluralité peuvent conduire à des résultats différents.

34%	33%	16%	17%
<i>A</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
<i>C</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>C</i>

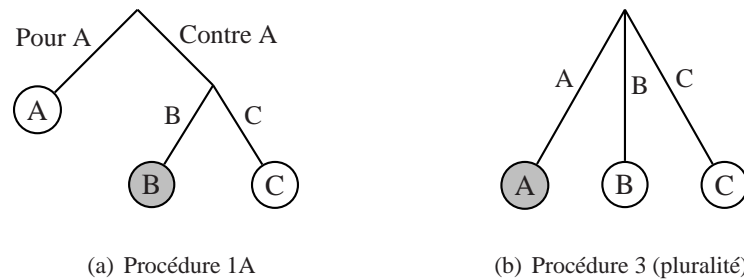
TAB. II.2.2 – Préférences supposées des sénateurs dans l’exemple de Pline le Jeune.

Dans la lignée de cette exemple, supposons que les avis dans le sénat se partage comme indiqué par le tableau II.2.2. Le vote à la pluralité (fig. II.1(b)) donne alors *A* (acquittement) vainqueur, à supposer que les sénateurs votent sincèrement). Si les sénateurs pro-*B* et pro-*C* forment une coalition, cela revient à organiser un vote séquentiel, d’abord entre (*A*) et (*B* ou *C*) qui équivaut à un vote entre « pour *A* » et « contre *A* ». Si cette dernière proposition l’emporte, il faudra ensuite départager *B* et *C* (fig. II.1(a)). En vérifiant, on constate que le sénat vote d’abord contre *A* puis en faveur de *B*, car les partisans du *A*, une fois ce dernier éliminé, vote pour *B*. *B* est donc vainqueur par la procédure 1A.

Les procédures 1A et 3 ne donnent pas les mêmes vainqueurs. Avec les mêmes préférences de départ, il est possible d’obtenir un vainqueur différent selon la procédure qu’on utilise. Le choix d’une procédure n’est donc pas neutre. Il semble en effet que le choix d’une procédure puisse être aussi déterminant que les préférences des électeurs dans la détermination du vainqueur. En connaissant les préférences des votants, celui qui choisit la procédure peut donc choisir le vainqueur. Cela étant, dans les pays démocratiques le type de procédure à utiliser est généralement fixé

<sup>5</sup>Faute d’avoir consulté une traduction française, nous proposons ici la nôtre, à partir de la traduction anglaise de William Melmoth dans Pliny the Younger, *Letters*, Vol. IX, Part 4, letter LXXXIX. The Harvard Classics. New York : P.F. Collier & Son, 1909-14.

<sup>6</sup>Nous reprenons la même numérotation que Farquharson [1969].

FIG. II.1 – Deux procédures ne donnant pas le même résultat<sup>6</sup>.

par la loi. Il n'est donc pas choisi de manière contingente. Ainsi même si le système électoral induit un biais, on est au moins assuré que le choix du vainqueur n'est pas laissé à la discrétion du législateur qui imposerait le type de procédure le plus adéquat pour faire élire son favori. La législation française prévoit néanmoins que les lois électorales ne peuvent être modifiées moins d'un an avant l'échéance électorale, afin d'éviter justement les changements de procédures calculés. Il convient cependant de rester prudent sur ces propos tant la fréquence de changement des lois électorales en France est élevée, comme l'illustrent les récentes réformes des élections régionales, européennes et sénatoriales.

Un autre aspect de l'organisation des élections concerne plus spécifiquement le vote séquentiel : s'il n'existe pas de vainqueur de Condorcet, l'ordre dans lequel les candidats sont introduits dans la séquence de vote a une conséquence directe sur le résultat de l'élection. S'il existe un vainqueur de Condorcet, il sera forcément élu puisque par définition, il remporte tous les duels suivant son introduction dans la séquence de vote. Quand il n'existe pas, on peut schématiquement affirmer que plus un candidat est introduit tard dans la séquence de vote, plus il est favorisé. En reprenant notre exemple, on constate donc que la procédure 1A défavorise le candidat A, qui est introduit à la première étape du vote.

Construisons maintenant deux procédures de votes que nous appellerons 2A et 2B. La procédure 2A consiste à comparer les candidats B et C entre eux ; le vainqueur de ce duel rencontre ensuite A. De même, la procédure 2B consiste à comparer d'abord A et C puis le vainqueur avec B. Ces procédures sont schématisées sur la figure II.2.

La procédure 2A donne B vainqueur en éliminant C d'abord, puis A (avec 34% contre 66% pour B). La procédure 2B donne, elle, C vainqueur en éliminant A puis

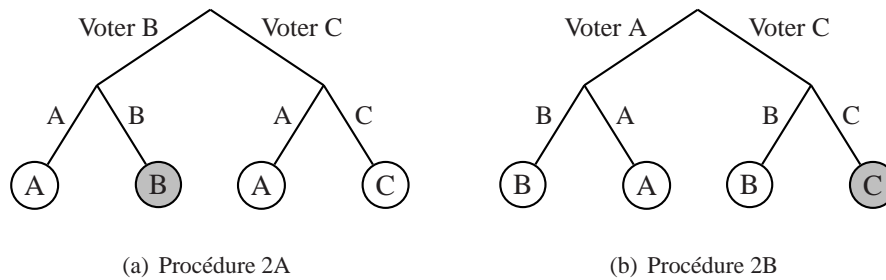


FIG. II.2 – Le choix de la séquence de vote détermine le résultat.

*B* (avec 49% contre 51% pour *C*). On peut donc conclure que le même type de procédure (le vote séquentiel) donne des résultats différents selon l'ordre dans lequel on confronte les candidats. Celui qui détermine la séquence de vote, l'*agenda-setter*, a donc le pouvoir de déterminer dans certains cas le résultat d'un vote séquentiel.

En France, ce problème concerne le vote des amendements des textes présentés à l'Assemblée nationale. Lorsqu'un texte est proposé à l'Assemblée, chaque article du texte est étudié un par un. Tous les participants au débat (membres du Gouvernement, rapporteur au nom de la commission et députés intervenant soit au nom de leur groupe, soit à titre individuel) peuvent proposer des amendements à ces articles. C'est le Président de l'Assemblée qui détermine l'ordre dans lequel sont appelés ces amendements, en allant du général au particulier. L'ordre des amendements est alors très important car l'adoption d'une solution entraîne automatiquement l'élimination des solutions concurrentes. Le Président, qui connaît la composition de l'Assemblée et donc de façon plus ou moins précise les avis des députés, peut donc organiser l'ordre pour favoriser un amendement plutôt qu'un autre.

### II.2.B Le taux de qualification comme remède

Si le vote séquentiel semble une solution pratique pour remédier au problème de cyclicité, nous avons vu qu'il est très imparfait<sup>7</sup>. Un autre moyen d'éviter le

<sup>7</sup>Le cas de l'amendement Powell adopté en 1957 par le Congrès américain est souvent cité comme illustration de problème du vote séquentiel, notamment du comportement stratégique qu'il induit, cf. Farquharson [1969]; Brams [1976]; Riker [1982].

problème de cyclicité est d'exiger une majorité qualifiée, c'est-à-dire un nombre de voix supérieur au taux habituel de 50%.

**Définition** Soit  $\rho(A, B)$  la part des électeurs préférant le choix  $A$  au choix  $B$ . On dit que  $A$  est socialement préféré à  $B$  à la majorité qualifiée de taux  $\tau$  (ce qu'on écrit  $A \gg_{\tau} B$ ) si :

$$\rho(i, j) > \tau > \frac{1}{2}$$

En France, pour modifier la constitution, il faut soit un référendum, soit une majorité qualifiée de trois cinquièmes des parlementaires réunis en Congrès. La majorité qualifiée de  $\frac{2}{3}$  est également utilisée par le Conclave des cardinaux pour désigner le nouveau Pape. Quand l'élection doit départager trois candidats, un taux de qualification de  $\frac{2}{3}$  permet d'éliminer tout cycle de Condorcet. Ce résultat est généralisé par Greenberg<sup>8</sup> :

**Théorème (Greenberg)** *Quand les électeurs doivent départager  $n$  candidats, une condition nécessaire et suffisante pour exclure tout cycle de Condorcet de longueur  $q \leq n$  est un taux de majorité qualifiée de  $\tau = \frac{n-1}{q}$ .*

Par exemple pour éviter tout cycle de Condorcet lorsqu'il y a trois candidats, il faut et il suffit d'avoir un taux de qualification de  $\frac{2}{3}$ . On peut se demander alors pourquoi la constitution française prévoit seulement une majorité qualifiée de  $\frac{3}{5}$  pour être modifiée. Dès que le nombre d'options est de trois ou plus (condition nécessaire d'apparition d'un cycle), ce taux est en effet trop bas pour prévenir totalement l'apparition de cycle. La législation aurait pu exiger un taux de  $\frac{2}{3}$ , ou même de 90% pour se prémunir contre le paradoxe de Condorcet avec de nombreux candidats. Mais — c'est une évidence de le dire — plus un taux de qualification est élevé, plus il est difficile à atteindre. Or si  $(1 - \tau) < \rho(A, B) < \tau$ , la règle de la majorité qualifiée ne permet pas de trancher entre les options  $A$  et  $B$  et ce cas est d'autant plus probable que  $\tau$  est grand. Il faut donc arbitrer entre la transitivité qui nous amène à exiger une majorité supérieure à 50% et la complétude de la préférence collective. Si  $\tau$  est trop élevé, on risque fort de se retrouver dans une situation d'indétermination entre deux options, quand aucune des deux ne parvient à s'assurer une majorité qualifiée contre l'autre. S'il n'existe pas de vainqueur de Condorcet au taux  $\tau$ , on aboutit donc à une situation ambiguë dans laquelle il est impossible de déterminer le vainqueur. Imaginons par exemple quatre propositions

<sup>8</sup>Joseph GREENBERG, 1979 : « Consistent majority rule over compact sets of alternatives », *Econometrica*, vol. 47, pp. 627–636.

$a, b, c$  et  $d$  pour lesquelles on ait  $a \gg_{\tau} b, c \gg_{\tau} d$  et  $d \gg_{\tau} b$  mais qu'on ait  $b \approx_{\tau} d$  (indétermination au taux  $\tau$ ). Il est dès lors impossible de déterminer le vainqueur.

Pour casser ces indéterminations, il faut « forcer » le résultat. Ainsi, depuis le Concile de Lyon II en 1274, les cardinaux qui élisent un nouveau pape ne peuvent sortir physiquement du conclave avant d'avoir pris une décision<sup>9</sup>. Les démocraties libérales sont plus délicates à l'égard de leurs hommes politiques. La solution qui est généralement utilisée est la prééminence du *statu quo*. Par exemple, pour changer la constitution française, si l'on se trouve dans une situation d'indétermination de telle sorte que ni le *statu quo* ni la nouvelle proposition n'atteignent la majorité qualifiée, c'est le *statu quo* qui prévaut et la constitution reste inchangée. On sent bien que cette disposition entraîne une asymétrie entre les différentes options. Favoriser ainsi la stabilité correspond à la volonté des démocraties libérales de se construire dans la continuité plutôt que par heurts, comme le soutient Nemo [2002].

Avec un taux de qualification de  $\frac{3}{5}$ , nous avons vu qu'un cycle peut donc apparaître. En réalité, une justification théorique a récemment été émise, qui permet d'expliquer pourquoi des taux de qualification plus bas que ceux du théorème de Greenberg, permettent toutefois d'éviter les cycles. Comme nous l'avons expliqué au chapitre I, l'apparition d'un cycle dépend de la structure des préférences. Des préférences suffisamment homogènes (comme c'est le cas avec l'unimodalité) excluent les cycles. Balasko et Crès [1997] ont montré que les cycles restent théoriquement des événements rares. Ils considèrent un simplexe de dimension  $(n! - 1)$  représentant l'ensemble des profils de préférence possibles sur les  $n$  options que doivent départager les électeurs, dont ils supposent le nombre infini, ce qui n'est pas aberrant dans un pays comptant 40 millions d'électeurs comme la France. Ils montrent alors que la proportion de profils conduisant à un cycle de Condorcet avec un taux de qualification  $\tau$  est inférieure à

$$Y(n, \tau) = n! \left( \frac{1 - \tau}{0,4714} \right)^{n!}$$

Si l'on considère que tous les profils de préférence ont la même probabilité d'avènement, ce chiffre représente environ la probabilité d'apparition d'un cycle. Or

---

<sup>9</sup>« Ils habiteront tous en commun dans la même salle, sans séparation de murs ni d'autre espèce, excepté pour la garde-robe. L'appartement sera tellement fermé qu'on ne puisse ni entrer ni sortir. [...] Si, au bout de trois jours après l'entrée au conclave, l'Église n'est pas pourvue d'un pasteur, on ne servira qu'un mets les cinq jours suivants tant le matin que le soir, aux cardinaux, au delà de ce terme, rien autre chose que du pain, du vin et de l'eau, jusqu'à l'élection faite. »

## II.3. LE SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS NE VÉRIFIE PAS CERTAINES PROPRIÉTÉS

---

lorsqu'un  $1 - \tau < 0,4714$  on a alors  $\frac{1-\tau}{0,4714} < 1$  d'où un  $Y(n, \tau)$  très petit. Donc dès que le taux de qualification  $\tau$  est supérieur à 53%, la probabilité d'obtenir un cycle est très faible. Leur exemple est très convaincant : quand il y a 7 candidats et que le taux de qualification est de 54%,  $Y(n, \tau) < 10^{-52}$ . On peut également calculer que  $Y(5, 60\%) < 3 \times 10^{-7}$ .

Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des taux de qualification très élevés qui empêcheraient toute prise de décision en entraînant une incapacité à trancher entre des candidats ou des propositions. La majorité qualifiée constitue alors un bon remède aux cycles de Condorcet.

### II.3 Le scrutin majoritaire à deux tours ne vérifie pas certaines propriétés

Le scrutin majoritaire est une spécialité quasi-française ; très peu d'autres pays dans le monde l'utilisent. L'objectif fondamental est d'éviter le paradoxe de Borda, c'est-à-dire qu'un candidat soit élu bien qu'il ait contre lui une majorité de votants. La parade française a d'abord consisté, sous la III<sup>e</sup> et la IV<sup>e</sup> République, à exiger que le candidat recueille la majorité absolue des suffrages pour être élu, quitte à organiser plusieurs tours. C'est ainsi qu'il a fallu au dernier Président de la IV<sup>e</sup> République, René Coty, treize tours de scrutin avant d'être élu en décembre 1953.

La leçon sera retenue : sous la V<sup>e</sup> République, on limite à deux le nombre de tours possibles. L'idée est d'utiliser le premier tour pour déterminer les « meilleurs » candidats, le second tour restreignant alors le vote à ces candidats. C'est une manière artificielle de se ramener au cas binaire, pour lequel, nous l'avons vu, le scrutin majoritaire est idéal. Cela permet alors de s'assurer que le candidat élu est bien légitimé par une majorité ou une quasi-majorité des électeurs. Pour les présidentielles en effet, la loi limite à deux le nombre de candidats pouvant atteindre le second tour.

Mais les modalités du second tour varient selon les élections. Pour élire les assemblées, on ne souhaite pas casser la représentation des différentes tendances en confiant la conduite à un parti unique. On a donc mis en place des seuils, qui ne limitent pas textuellement le nombre de candidats au second tour. Dans le cas des législatives, les candidats doivent avoir recueilli au moins 12,5% des suffrages au premier tour pour se présenter au second ; le seuil est de 10% pour qu'un candidat au conseil général puisse se présenter au second tour des cantonales. La modalité du seuil de voix autorise la présence de plus de deux candidats au second tour.



L'objectif de représentativité nécessite dès lors que le vainqueur puisse être élu à la majorité relative. Ce système fonctionnait bien lorsque deux grands partis, l'un de gauche, l'un de droite, ralliaient une part importante des suffrages ; un candidat pouvait en général obtenir une quasi-majorité absolue. Mais l'émergence du Front National depuis le début des années quatre-vingts et dans un moindre mesure de l'UDF à la fin des années quatre-vingt-dix a contribué à l'augmentation du nombre de second tours dits triangulaires opposant trois candidats ou plus. Il est alors rare qu'un candidat obtienne une majorité absolue.

Nous allons étudier quelques propriétés du scrutin majoritaire à deux tours. Ces critères ne coïncident pas avec les conditions de Arrow. Ils permettent néanmoins d'exposer de manière flagrante les paradoxes auxquels le scrutin majoritaire à deux tours peut conduire. Nous nous attacherons ici au cas des présidentielles, plus facile à étudier, car le nombre de candidat au second tour est fixe. Néanmoins les remarques que nous faisons s'appliquent également aux différents scrutin à deux tours utilisés en France.

### II.3.A Critère de Condorcet

On appelle aussi ce critère la Condorcet-compatibilité. C'est cette idée qui est au cœur du paradoxe de Borda. S'il existe un candidat que la société préfère à chacun de ses concurrents (le vainqueur de Condorcet), il est normal qu'un mode de scrutin élise ce candidat. Si ce n'était pas le cas on élirait un candidat, alors qu'un autre lui serait préféré par une majorité d'électeurs. Le paradoxe de Borda consiste à remarquer que le scrutin à la pluralité ne vérifie pas le critère de Condorcet s'il y a trois candidats ou plus.

De même, le scrutin majoritaire à deux tours ne vérifie pas le critère de Condorcet. Notre contre-exemple est adapté de [Nurmi \[1987\]](#).

1/3	1/3	6/21	1/21
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>

TAB. II.3.3 – Le scrutin majoritaire n'est pas Condorcet-compatible.

Imaginons une société avec le profil de préférence indiqué dans le tableau [II.3.3](#). (Les fractions en tête de chaque colonne indiquent la proportion de la population ayant respectivement chacune des préférences indiquées.) Avec la règle de la présidentielle, on garde les deux meilleurs candidats au second tour. Ainsi, ce sont les

candidats  $a$  et  $b$  (avec respectivement  $\frac{8}{21}$  et  $\frac{1}{3}$  des voix) qui se maintiennent ; au second tour,  $b$  l'emporte avec  $\frac{13}{21}$  voix contre  $\frac{8}{21}$ .

Mais si l'on effectue les comparaisons par paires, on constate que  $c$  est le vainqueur de Condorcet ! Il bat en effet  $b$  et  $a$ , à chaque fois avec une majorité absolue de  $\frac{13}{21}$  voix. Hélas, comme il n'est pas présent au second tour, il a peu de chances d'être effectivement élu Président ...

Les élections présidentielles françaises, telles qu'elles sont prévues depuis la révision constitutionnelle du 6 novembre 1962, permettent donc d'élire un candidat ( $a$  dans notre exemple) alors même que la majorité des électeurs lui préfèrent un autre candidat ( $c$  dans notre exemple). Il est toujours difficile de détecter ce genre de paradoxes car les bulletins de vote ne nous renseignent que partiellement sur les préférences des électeurs. Néanmoins reprenons l'hypothèse contestable d'unimodalité des préférences sur un axe politique gauche-droite (cf. sous-section [I.3.B](#)). Le théorème de l'électeur médian nous indique que le candidat le plus proche de l'électeur médian<sup>10</sup> est le vainqueur de Condorcet. Si l'on suppose que les préférences des Français sont réparties symétriquement sur l'axe gauche-droite, il semble donc que le vainqueur de Condorcet soit un candidat centriste. Comme l'explique [Laslier \[2004a\]](#), Raymond Barre était clairement ce candidat en 1988, se positionnant ostensiblement en candidat centriste, entre Mitterrand et Chirac. En supposant que les électeurs ont voté sincèrement au premier tour, et toujours dans le cadre de préférences unimodales, on peut en effet calculer que Barre aurait battu Mitterrand en duel avec 50,88% des voix et Chirac avec 65,56%. Mais Raymond Barre n'a pas passé le premier tour du scrutin et ces derniers se sont affrontés au second tour. De même, certains présentent Balladur comme le vainqueur de Condorcet de 1995, mais c'est ici plus contestable tant sa position et celle de Chirac étaient politiquement proches. Ces deux exemples montrent cependant la tendance du scrutin à deux tours à laminer les candidats du centre et donc évincer les potentiels vainqueurs de Condorcet.

#### II.3.B La non-monotonie

Nous avons déjà évoqué la monotonie à la section [II.1](#). Étudier les procédures de vote à la lumière de ce concept revient à se demander si un candidat peut pâtir d'une plus grande popularité.

---

<sup>10</sup>L'électeur médian est l'électeur tel qu'autant d'électeurs ont un mode à gauche du sien qu'à droite.

**Définition (Monotonie)** Soient  $X$  une liste de candidats pris dans  $X$  et  $\mathcal{R}$  l'ensemble des profils de préférences. Soit  $F$  une fonction de choix social définie sur  $P(X) \times \mathcal{R}$  qui à un couple  $(X, R)$  associe un sous-ensemble de candidats  $A \subseteq X$ . Soient  $R$  et  $R'$  deux profils de préférences de  $\mathcal{R}$  dont la seule différence est qu'un candidat  $x$  est mieux classé dans une ou plusieurs préférences individuelles de  $R'$  que dans  $R$ .

Alors  $F$  est monotone si :

$$x \in F(X, R) \Rightarrow x \in F(X, R')$$

Littéralement, si la fonction de choix social est monotone, cela signifie que lorsqu'un candidat fait partie des vainqueurs et qu'il progresse dans les préférences d'un ou plusieurs électeurs (toutes chose égales par ailleurs), il fera encore partie des vainqueurs. Dans notre cas, comme nous considérons un scrutin uninominal, l'ensemble des vainqueurs (noté  $A$  dans la définition) est limité à un élément : on n'élit qu'un candidat. Dire qu'un mode de scrutin est monotone signifie donc qu'un gain de popularité ne doit pas nuire à un candidat en passe de gagner les élections. Le contre-exemple suivant montre que le scrutin à deux tours n'est pas monotone. Nous le montrons dans le cas de la présidentielle, où seuls les deux meilleurs candidats restent en lice pour le second tour. (On pourrait de la même manière montrer avec un autre exemple que la limite de 12,5% utilisée aux législatives ne change rien.)

34%	35%	31%
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>

TAB. II.3.4 – Non-monotonie : préférences initiales

30%	39%	31%
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>

TAB. II.3.5 – Non-monotonie : préférences après le discours

Imaginons une élection opposant trois candidats  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Les préférences initiales des électeurs sont données dans le tableau II.3.4. Si l'on suppose que les

électeurs votent sincèrement, les candidats  $c$  et  $a$  reçoivent respectivement 35% et 34%. Le deuxième tour donne alors  $c$  gagnant avec 70%.

Supposons maintenant que peu de temps avant le premier tour,  $c$  pense pouvoir gagner et veut mettre toutes les chances de son côté : il réalise alors un discours largement relayé par les media dans lequel il promet un geste fiscal aux agriculteurs. Après ce discours,  $c$  gagne une nette popularité auprès de ces derniers : 4% des électeurs qui avaient une préférence  $abc$  ont alors une préférence  $cab$  ; tout le reste est inchangé, les non-agriculteurs étant peu sensibles à la promesse de  $c$ . Le nouveau profil de préférence de la population est donné par le tableau II.3.5. Le premier tour élimine désormais  $a$  et le deuxième tour donne alors  $b$  gagnant avec 61%. Le candidat  $c$  a souffert du soutien additionnel que lui a apporté son discours.

Pourtant, le choix social devrait correspondre au vœu des électeurs, en ce sens du moins que les modifications des préférences de l'électorat doivent se retrouver dans le choix social, en tout cas ne pas avoir l'effet inverse. Sans quoi l'on ne peut pas dire que l'élu ait une grande légitimité. Par exemple, si une conjoncture économique défavorable poussent certains à préférer une politique de relance, ils souhaiteront sans doute que l'actuel élu reste à son poste, et voteront pour lui, au lieu de voter pour leur habituel candidat. Notre contre-exemple prouve que la volonté de ces électeurs de maintenir un tel candidat en poste peut avoir l'effet pervers de l'en déchoir.

### II.3.C Critère de participation

Comme l'indique la Déclaration universelle des droits de l'Homme, le suffrage doit être universel. Nous ne revenons pas sur ce principe incontestable que toute personne capable de raison a le droit de s'exprimer sur la direction des choses publiques de son pays. Le suffrage universel, appliqué pour la première fois dans le Vermont en 1777, fut institué en principe dans la Constitution française de 1793, mais n'entre en vigueur qu'en 1848. Dans les deux cas, le suffrage « universel » ne concerne que les hommes. En 1893, la Nouvelle-Zélande est le premier État à accorder un droit de vote aux femmes pour toutes les élections. Si son concept prend origine dans le mouvement des Lumières, qui reconnaît en chacun la valeur de la raison, il faut attendre la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle pour que le suffrage universel mixte soit institué dans la majorité des grandes démocraties libérales.

Légitimer le pouvoir par le suffrage universel n'a de sens que si les électeurs ont effectivement intérêt à voter. Nous n'entrerons pas ici dans une analyse sociologique de l'abstention. Mais il convient de remarquer que certains modes de

### II.3. LE SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS NE VÉRIFIE PAS CERTAINES PROPRIÉTÉS

---

scrutin n'incitent pas forcément les électeurs à participer, et le vote majoritaire à deux tours en fait partie : il ne remplit pas le critère de participation.

5	8	6
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

TAB. II.3.6 – Critère de participation : profil d'origine

7	8	6
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

TAB. II.3.7 – Critère de participation : avec deux nouveaux électeurs

Supposons que les préférences de l'électorat sur les candidats *a*, *b* et *c* se répartissent comme indiqué dans le tableau II.3.6. Dans ce cas, le second tour départage *b* et *c* et donne *b* gagnant avec onze voix sur dix-neuf.

Imaginons que deux nouveaux électeurs avec les préférences *abc* arrivent au bureau de vote. Le nouveau profil de préférence est alors donné par le tableau II.3.7. Ces deux nouveaux électeurs votent pour *a* et contribuent donc à lui faire passer le premier tour. Au second tour, *c* gagne avec quatorze voix contre sept. Si les deux électeurs supplémentaires n'avaient pas voté, *b* aurait été élu ; en votant, ils font élire *c*. Or ils préfèrent pourtant *b* à *c*. Ils ont donc intérêt à ne pas voter. Le scrutin majoritaire à deux tours ne respecte donc pas le critère de participation.

Ce problème semble lié à celui de la non-monotonie. En réalité, Nurmi [1999] montre que les deux paradoxes sont indépendants. La règle de Copeland est un exemple de mode de scrutin monotone qui ne respecte pas le critère de participation. (Trouver en revanche des modes de scrutin non-monotones qui respectent le critère de participation reste une question ouverte en théorie du choix social.) On peut toutefois le lier au problème du vote stratégique. Dans notre exemple, les deux électeurs supplémentaires ont intérêt à voter stratégiquement au premier tour. En votant pour *b*, ils assurent son passage au second tour. Tout le monde ayant intérêt à voter stratégiquement dans le cas d'un vote majoritaire binaire (second tour), c'est *b* qui est élu, ce qui arrange finalement ces deux électeurs.

Nous voyons deux raisons pour lesquelles le paradoxe de la participation (*no-show paradox* en anglais) est gênant, et c'est en cela qu'il est proche du vote straté-

gique. La première et la plus évidente raison, c'est que ce paradoxe remet en cause l'intérêt même de vote si certains ont intérêt à ne pas voter. Le problème est alors que le choix social ne découle pas véritablement des préférences des électeurs car, comme dans le cas du vote stratégique, certains électeurs ne révèlent pas leurs préférences sincères (au lieu de mentir, ils s'abstiennent). L'exemple de Nurmi [1999] montre que la proportion de l'électorat dans ce cas peut être très élevée (47% dans son exemple). Le second problème émanant du paradoxe de la participation est qu'il donne, comme la manipulation, le pouvoir de déterminer le résultat de la procédure à une fraction de l'électorat et crée en ce sens une « tyrannie de la minorité ». Remarquons que le fait de s'abstenir, comme mentir, ne permet jamais à ces électeurs d'obtenir leur premier choix. Pour ces deux raisons, un mode de scrutin respectant le critère de participation nous paraît réellement souhaitable.

### II.3.D Critère de renforcement

Dans le même genre d'idées que pour la monotonie ou la participation, on voudrait que lorsque deux populations distinctes d'électeurs départagent un même ensemble de candidats, et si ces deux groupes élisent chacun de leur côté le même candidat, le vote du groupe entier donnent le même résultat. Plus formellement :

**Définition (Critère de renforcement)** Soient  $F$  une fonction de choix social et  $X$  l'ensemble des candidats. Soient deux groupes d'électeurs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  avec les préférences respectives  $S_1$  et  $S_2$  tels que

$$F(X, S_1) = V_1$$

$$F(X, S_2) = V_2$$

où  $V_1$  et  $V_2$  sont des sous-ensembles de l'ensemble des candidats  $X$ . Alors on dit que  $F$  vérifie le critère de renforcement si :

$$V_1 \cap V_2 \neq \{\emptyset\} \Rightarrow F(X, (S_1 \cup S_2)) = V_1 \cap V_2$$

Si l'on ne se préoccupe que des modes de scrutin qui n'élisent qu'un candidat,  $V_1$  et  $V_2$  ne contiennent chacun qu'un élément, respectivement le candidat qu'élit chacun des groupes d'électeurs. Si les groupes  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  désignent tous deux le même candidat  $x$ ,  $V_1 \cap V_2$  est alors un ensemble non-vide puisqu'il contient un et un seul élément : le candidat  $x$ . Il est légitime de s'attendre à ce que les deux groupes,

II.3. LE SCRUTIN MAJORITAIRE À DEUX TOURS NE VÉRIFIE PAS  
CERTAINES PROPRIÉTÉS

---

s'ils votent ensemble, élisent ce candidat, on devrait donc avoir :  $F(X, (S_1 \cup S_2)) = \{x\}$ .

Est			Ouest		
35%	40%	25%	40%	55%	5%
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>

TAB. II.3.8 – Critère de renforcement : préférences des circonscriptions séparées.

Est et Ouest		
20%	47,5%	32,5%
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

TAB. II.3.9 – Critère de renforcement : préférences des circonscriptions réunies.

Notre contre-exemple, tiré de [Nurmi \[1999\]](#), prouve que le scrutin majoritaire à deux tours ne vérifie pas le critère de renforcement. Imaginons deux circonscriptions Est et Ouest de tailles égales et dont les préférences sont données par le tableau II.3.8. Dans ce cas, le lecteur peut vérifier qu'au scrutin majoritaire à deux tours, les circonscriptions Est et Ouest élisent tous les deux *b*. Ce candidat reçoit au second tour 65% des voix à l'est et 55% des voix à l'ouest. On s'attend donc à ce que les circonscriptions réunies élisent le même candidat.

Supposons que les circonscriptions votent finalement en même temps. Nous avons représenté dans le tableau II.3.9 le profil de préférence globale des deux circonscriptions réunies. On observe alors que le second tour oppose *b* et *c*; et *c* l'emporte avec 52,5% des voix, ayant bénéficié des voix des 20% d'électeurs puisque leur favori *a* avait été éliminé au premier tour.

Ce genre de paradoxe concerne naturellement le vote par circonscription, c'est-à-dire en France les cantonales, les régionales et les européennes. Dans l'art ésotérique du découpage électoral, cette caractéristique du vote majoritaire à deux tours peut alors être utilisée par des législateurs s'ils connaissent assez précisément l'état et la répartition géographique des préférences pour faire prévaloir une opinion.

## II.4 Le vote stratégique dans le système français

### II.4.A Le vote stratégique dans un système à deux tours

Nous venons de voir qu'un grand défaut du scrutin majoritaire à deux tours est qu'il ne satisfait pas au critère de Condorcet : en d'autres termes, le vainqueur n'est pas nécessairement le vainqueur de Condorcet. Pour montrer cela nous avons supposé que les électeurs votaient sincèrement. Or nous avons évoqué dans la section I.2 le fait que certains électeurs pouvaient être amenés à voter stratégiquement<sup>11</sup>. Nous avons déjà vu que le vote stratégique pouvait modifier le résultat final de l'élection. Niou [2001] montre que le vote stratégique peut rendre le scrutin à deux tours Condorcet-compatible s'il oppose trois candidats.

Reprenons sa notation avec trois candidats :  $a$  désigne le candidat qui reçoit le plus de voix au premier tour en cas de vote sincère,  $b$  le second et  $c$  le candidat qui reçoit le moins de voix au premier tour (par vote sincère toujours). Niou montre alors que :

- si le vainqueur de Condorcet existe et arrive premier ( $a$ ) ou second ( $b$ ) à l'issue du premier tour, alors le vote stratégique n'a pas de conséquence, et c'est bien le vainqueur de Condorcet qui remporte l'élection (cas 1a, 1b, 2a et 2b) ;
- si le vainqueur de Condorcet est en dernière position à l'issue du premier tour, le comportement stratégique de certains partisans du perdant de Condorcet<sup>12</sup>, précisément ceux qui rangent le vainqueur de Condorcet en deuxième position dans leur préférence, aident ce dernier à passer au second tour (cas 3a et 3b) ;
- si le vainqueur de Condorcet n'existe pas, alors le résultat dépend de l'ordre du cycle (cas 4a et 4b).

Les résultats de Niou [2001] sont résumés dans le tableau II.4.10. Ils montrent que dans un système à deux tours, le vote stratégique entraîne toujours la victoire du vainqueur de Condorcet (noté VC) s'il existe. Ainsi donc si on fait l'hypothèse d'une information parfaite des électeurs, le vote stratégique permet au scrutin majoritaire à deux tours de répondre au critère de Condorcet. Cela tend à relativiser la faiblesse du scrutin majoritaire à deux tours. Nous allons cependant voir que l'effet du vote stratégique n'est que partiel.

<sup>11</sup>Nous ne considérons pas ici, la technique peu utilisée qui consiste lorsque son candidat préféré est annoncé en tête, à voter pour un candidat moyen dans l'espoir de le faire passer au second tour, afin que le favori le batte plus facilement qu'un concurrent serré.

<sup>12</sup>Le perdant de Condorcet est le candidat qui perd ses duels face à tous ses concurrents.



	Préférences	Vainqueur officiel	
1a.	$a \gg b \gg c$	le VC est $a$	$a$
1b.	$a \gg c \gg b$	le VC est $a$	$a$
2a.	$b \gg a \gg c$	le VC est $b$	$b$
2b.	$b \gg c \gg a$	le VC est $b$	$b$
3a.	$c \gg a \gg b$	le VC est $c$	$c$
3b.	$c \gg b \gg a$	le VC est $c$	$c$
4a.	$a \gg b \gg c \gg a$	pas de VC	$c$
4b.	$a \gg c \gg b \gg a$	pas de VC	$b$

TAB. II.4.10 – Vote stratégique dans un système à deux tours

### II.4.B L'importance des sondages

Pour que le vote stratégique puisse avoir lieu, il faut que les individus qui sont en position de voter stratégiquement aient suffisamment d'informations pour le faire. Jusqu'à maintenant, nous avons toujours supposé que les électeurs avaient une connaissance parfaite de la répartition des préférences dans l'électorat. Merrill a montré qu'en l'absence d'information, le vote sincère est une stratégie dominante dans le vote à la pluralité<sup>13</sup> ; nous supposons qu'il en est de même pour le scrutin majoritaire à deux tours. En effet nous ne voyons pas quelle raison, en l'absence totale d'information sur les préférences des autres électeurs (et donc de leurs stratégies éventuelles), pourrait pousser un électeur à se prononcer différemment de sa préférence. Ce n'est éventuellement plus le cas quand l'électeur connaît les préférences des autres électeurs.

Si dans un petit comité, il est facile de connaître les goûts de chacun, c'est en revanche impossible à l'échelle d'un pays. Fisher et Myatt [2002] distinguent deux vecteurs d'information utilisés par l'électeur dans ce cas-là ; ce sont des signaux qui le renseignent sur l'état probable de l'opinion avant une élection. L'information privée d'une part, provient essentiellement des avis que l'électeur recueille autour de lui. L'information publique d'autre part, provient elle des sondages<sup>14</sup>. Nous nous intéressons à l'information publique.

<sup>13</sup>S. MERRILL, « Strategic voting in multicandidate elections under uncertainty and under risk » in *Power, Voting, and Voting Power*, M. Holler, Ed. Physica-Verlag, 1981, pp. 179–187.

<sup>14</sup>On pourrait y inclure les résultats des élections précédentes, qui sont en un sens des sondages. En font également partie les traditions politiques du pays, notamment dans la répartition des partis dans le paysage politique. Selon le degré d'homogénéité des préférences sur une population, si son favori est éliminé au premier tour, un candidat votera sans doute pour un candidat politiquement proche, ce qui ne justifie que partiellement l'hypothèse d'unimodalité. Les électeurs peuvent donc anticiper en partie certains reports de voix. Ce type d'information est publique car il découle d'une habitude politique connue de tous.

Il paraît intuitif — tout électeur l'a vécu — que la prédiction donnée par un sondage influe la perception de l'élection et donc la façon modifie le penchant vers un vote « utile » ou un vote « sincère ». Comme l'indique [Abramson *et al.*, 2001], plus le candidat préféré d'un électeur semble perdant, plus l'électeur sera incité à voter stratégiquement, dans l'espoir de faire élire son second choix. C'est d'autant plus vrai que le second choix de celui-ci est engagé dans une course serrée avec le vainqueur annoncé.

« Strategic voting is particularly likely when polls show that a race between a voter's least preferred candidate and the voter's second choice is close. In contrast, if the polls project a landslide there would seem to be little reason to vote strategically since the perceived probability of altering the outcome drops as the victory margin increases. »

L'influence du sondage ne doit pas être sous-estimée. En illustrant ce qu'il appelle le paradoxe de réaction, Brams [1976] montre que non seulement la prédiction donnée par un sondage sur un vote peut en changer l'issue (comme ce fut le cas aux présidentielles américaines de 1948 et 1960), mais elle suffit à *elle seule* à en déterminer l'issue. Brams se place dans le contexte d'un vote à la pluralité entre deux candidats.) Le problème est posé sous cette forme : comment un institut de sondage peut-il rendre publique une prédiction d'intention de votes qui soit correcte, tout en sachant qu'il va ainsi influencer les électeurs ? L'institut effectue un sondage privé sur une petite portion de la population et observe une intention de vote. Il s'agit de faire de cette prédiction une prophétie auto-réalisatrice, c'est-à-dire que l'annonce et la réaction des électeurs à cette annonce la corrobore . Brams note empiriquement deux effets contradictoires d'une annonce de sondage :

- le *bandwagon effect* incite l'électeur à voter pour le candidat donné gagnant, car la probabilité qu'il fasse changer ce résultat est perçue comme faible ;
- l'*underdog effect* désigne la tendance des électeurs à soutenir le candidat donné perdant.

Ces deux effets sont alimentés par le vote stratégique des supporters d'un tiers parti. En fonction de leurs préférences, ils reporteront leur voix davantage sur le concurrent donné vainqueur ou perdant. Il s'agit pour l'institut de sondage de déterminer la réaction anticipée des électeurs à l'annonce (courbe de réaction) et ensuite de choisir une prédiction (on appelle ce point focal un *sunspot*). Les électeurs vont en effet modifier leur comportement de vote en fonction de l'annonce et modifier ainsi l'information publique sur les intentions de vote, qui modifie à nouveau le comportement des électeurs, etc. Par itération, le comportement électoral d'ensemble peut

ainsi converger vers le *sunspot*. L'institut de sondage doit donc choisir une prédiction *sunspot* c'est-à-dire telle que la modification itérative des comportements électoraux va corroborer ladite prédiction<sup>15</sup>.

L'exemple de Brams montre qu'il peut exister plusieurs de ces *sunspots*, et que deux *sunspots* peuvent aboutir à des résultats d'élection opposés. Ainsi le choix de la prédiction à annoncer est crucial et dans ce cas, l'institut de sondage détermine à lui seul qui sera le vainqueur.

Ce résultat est heureusement obtenu dans un modèle très schématique et ne se vérifie pas entièrement : [Myatt, 2000] montre que la coordination sur l'information publique n'est que partielle. Il trouve également un résultat contre-intuitif : plus un électeur perçoit un haut degré de vote stratégique dans la population, plus cet électeur est incité à voter sincèrement. Cela peut s'expliquer par le fait qu'un haut niveau de stratégie limite la pertinence des signaux qu'il reçoit. Dans ce contexte de mauvaise information, la difficulté à s'assurer de l'identité du candidat le mieux placé incite l'électeur à voter sincèrement. Cela conduit donc, en plus des raisons « idéologiques » que nous avons mentionnées à la sous-section I.2.B, à une situation où le vote stratégique n'est que partiel. C'est ainsi que des petits candidats reçoivent malgré tout des voix au premier tour d'un scrutin majoritaire à deux tours. Le vote stratégique ne suffit alors pas pour que le scrutin majoritaire à deux tours satisfasse le critère de Condorcet.

Nous avons montré dans ce chapitre l'intérêt du scrutin majoritaire, mais également les risques de paradoxe qu'il pouvait comporter. Sa version à deux tours comporte de nombreux défauts d'un point de vue théorique, largement dénoncés par les théoriciens du choix social. Il est donc étonnant que dans des périodes de contestation des lois électorales françaises, certains continuent d'afficher une foi inébranlable dans le scrutin à deux tours, bien qu'il n'incite que partiellement les électeurs à révéler leurs préférences sincères.

Comme indiqué à la section II.1, le scrutin majoritaire semble naturel lorsqu'il s'agit d'élire quelqu'un à un poste unique. Quand il s'agit une assemblée représentative, on lui a opposé depuis le début du XX<sup>e</sup> siècle le scrutin proportionnel. Ces deux familles de scrutin se retrouvent, avec des poids inégaux, dans les lois

---

<sup>15</sup>On trouve de tels comportements itératifs sur les marchés financiers ou dans le cas des *bank runs*. Schématiquement, si un observateur reconnu annonce qu'une banque est fragile et va faire faillite, les clients vont retirer leurs dépôts, ce qui va fragiliser la situation de la banque, incitant ainsi d'autres clients à retirer également leurs dépôts, etc. Le processus se répète en s'amplifiant, ce qui conduit la banque à faire effectivement faillite et valider ainsi la prévision initiale.

## II.4. LE VOTE STRATÉGIQUE DANS LE SYSTÈME FRANÇAIS

---

électorales successives de la v<sup>e</sup> République. Au chapitre **III**, nous proposons un mode de scrutin, le vote par assentiment, qui permet de remédier aux problèmes du scrutin majoritaire. Au chapitre **IV**, nous étudions les problèmes que posent le gouvernement par les électeurs et les paradoxes auxquels ces difficultés théoriques peuvent conduire.

## Chapitre III

# Le vote par assentiment : une solution ?

Comme tous les modes de scrutin, le scrutin majoritaire est imparfait dès qu'il s'agit de comparer plus de deux candidats. Nous avons vu au chapitre II ses grands défauts et ceux de sa variante à deux tours. La théorie du choix social s'est d'ailleurs construite sur ces défauts et elle abonde en solutions qui permettent d'en corriger certains. Mais la plupart des procédures qui sont apparues dans la théorie du choix social sont complexes et ne seraient — ce n'est pas injurieux de le dire — comprises qu'avec difficulté par la plupart des électeurs, tant leur raffinement mathématique les éloigne de toute applicabilité.

Dans ce court chapitre, nous voudrions en présenter une qui nous semble meilleure : le vote par assentiment. Le principe en est simple : l'électeur n'est pas restreint à voter pour un seul candidat. Il peut choisir ou, dirons-nous par anglicisme, approuver<sup>1</sup>, plusieurs candidats, tous ou aucun s'il le souhaite ; mais il ne peut pas voter plusieurs fois pour le même candidat. Le vainqueur est le candidat qui a reçu le plus d'assentiments. Ce type de scrutin, quoique simple, vérifie des propriétés très intéressantes et se montre en de nombreux points supérieurs au scrutin majoritaire. L'expérience menée par [Laslier et Van Der Straeten \[2004\]](#) prouve par ailleurs qu'il est facile à mettre en place et qu'il est bien compris par les électeurs. Aujourd'hui, il n'est pas encore utilisé dans des élections officielles mais des sociétés savantes, comme la Mathematical Association of America ou l'impressionnant

---

<sup>1</sup>Laurent Mann a proposé le terme « vote par assentiment » pour traduire l'expression anglaise *approval voting*. Ce mode de scrutin a été découvert aux États-Unis au milieu des années soixante-dix.

Institute of Electrical and Electronics Engineers (370 000 membres) pour l'élection de leur bureau [Brams et Fishburn, 2003].

### III.1 Des propriétés intéressantes

Pour étudier les propriétés de vote par assentiment, aussi appelé vote par approbation, nous nous appuyons largement sur Brams et Fishburn [1983]. Posons ici encore les axiomes I et II sur les préférences des électeurs : un électeur peut toujours se prononcer entre deux candidats ; et s'il préfère un candidat à un second, et ce second à un troisième, alors il préfère le premier au troisième. Sa préférence consiste donc en un classement des candidats. On notera par exemple  $(ab)cd$  pour signifier qu'un candidat est indifférent entre  $a$  et  $b$ , qu'ils les préfèrent tous deux à  $c$  lui-même préféré à  $d$ . Nous appelons une telle préférence *trichotomique* car elle sépare les candidats en trois niveaux d'indifférence :  $\{a,b\}$ ,  $\{c\}$  et  $\{d\}$ . La préférence  $(ab)(cd)$  est elle dichotomique. Au-delà de trois, on parle de préférence multichotomique.

#### III.1.A L'incitation à la sincérité

Théoriquement tous les modes de scrutin sont sujets au vote stratégique. Certains systèmes y sont néanmoins plus vulnérables que d'autres ; le vote par assentiment est un des systèmes qui incitent le plus à la révélation des préférences sincères.

Le principe du vote stratégique consiste à définir ses stratégies de vote admissibles et à éliminer celles qui ne donnent pas le meilleur résultat [Farquharson, 1969], une stratégie de vote étant un sous-ensemble de candidats pour lequel on vote. Pour le vote par assentiment, les stratégies admissibles sont celles qui ne contiennent pas d'éléments de la dernière classe de préférence et qui en contiennent au moins un de la première classe. Par ailleurs si l'on suppose un électeur avec une préférence  $abc$ , la stratégie  $\{b\}$  consistant à ne voter que pour le candidat  $b$  est toujours dominée par la stratégie  $a,b$ , c'est-à-dire qu'en aucun cas elle ne peut donner de meilleur résultat. Le vote sincère consiste alors à voter pour tous les candidats dans sa première classe d'indifférence. Le bulletin ne présente alors pas de « trou » par rapport au rangement des candidats. Il est en effet logique que si un électeur approuve son  $k^e$  candidat, il approuve également tous ceux qu'il lui préfère. Son bulletin comportera donc tous les candidats 1 à  $k$ , sans trou entre eux.

**Brams et Fishburn [1983]** montrent que si les préférences des électeurs sont dichotomiques, le vote par assentiment est le seul mode de scrutin sans rangement<sup>2</sup> qui soit non-manipulable. Les électeurs sont donc incités à voter sincèrement, c'est-à-dire pour tous les candidats dans leur première classe d'indifférence.

Quand les préférences sont trichotomiques ou multichotomiques cependant, le théorème ne s'applique plus. Si les électeurs n'ont que des préférences strictes et aucune indifférence, le vote par assentiment est théoriquement manipulable. Mais **Laslier [2004b]** montre que ce n'est pas le cas dans une situation où l'électorat est nombreux. Il propose un modèle sophistiqué dans lequel le signal d'information publique annonce les scores attendus pour les différents candidats, à partir des intentions de vote. Ce signal est déformé par un bruit, c'est-à-dire qu'au moment de l'annonce il existe une différence aléatoire entre le signal et les intentions réelles de vote. Le résultat de Laslier est qu'en l'absence d'*ex aequo* annoncés, le comportement rationnel consiste à voter sincèrement.

Il semble donc que, contrairement au vote majoritaire et notamment au vote majoritaire à deux tours, le vote par assentiment encourage la sincère révélation des préférences.

#### **III.1.B La monotonie**

Comme le vote à la pluralité, mais contrairement au scrutin majoritaire à deux tours, le vote par assentiment est bien monotone. Commençons par remarquer qu'un candidat ne peut progresser auprès d'un électeur que s'il n'est pas déjà dans sa première classe d'indifférence. Cela signifie qu'il ne peut progresser que si l'électeur ne votait pas pour lui avant. Dès lors il ne peut qu'en tirer bénéfice puisque cela ne peut pas lui retirer de voix.

En effet, supposons que la préférence de l'électeur est dichotomique, cela signifie qu'il sera approuvé alors qu'il ne l'était pas avant. Cela lui confère donc une voix supplémentaire, qui pourra ou non être décisive. En tout cas, sa situation n'empirera pas. Si la préférence est multichotomique, cette « promotion » fera peut-être passer le candidat dans la première classe d'indifférence, c'est-à-dire dans le sous-ensemble des candidats pour lequel l'électeur va effectivement voter, ou peut-être dans une classe de préférence intermédiaire.

---

<sup>2</sup>Un mode de scrutin sans rangement consiste à voter pour un ou plusieurs candidats, par opposition à un mode de scrutin avec rangement, comme la méthode de Borda, qui consiste pour chaque électeur à donner son classement des candidats.

Conformément à notre définition de la monotonie (sous-section II.3.B), si le candidat était vainqueur avant de progresser, il le sera toujours après. On peut donc dire que le vote par assentiment est monotone.

Pour ces raisons, on peut également dire que le vote par approbation vérifie le critère de renforcement. Si un même candidat reçoit le maximum d'approbations dans deux circonscriptions, la somme de ces approbations, c'est-à-dire le nombre d'approbations qu'il reçoit par les deux circonscriptions réunies est supérieure au nombre d'approbations de tout autre candidat. Supposons que  $A$  gagne dans les deux circonscriptions avec respectivement  $a_1$  et  $a_2$  assentiments. Supposons, hypothèse la plus dangereuse pour  $A$ , qu'il soit talonné dans les deux cas par le même candidat  $B$ , qui reçoit lui  $b_1$  et  $b_2$  assentiments.

Comme par définition  $a_1 > b_1$   
 et  $a_2 > b_2$  Ainsi  $A$  qui gagnait dans chacune

on a donc :  $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$

des circonscriptions, gagne aussi dans les circonscriptions réunies. Le critère de renforcement est vérifié.

### III.1.C Le critère de Condorcet

Brams et Sanver [2003] montrent que le vote par assentiment respecte le critère de Condorcet en ce sens que « les vainqueurs de Condorcet font toujours partie des vainqueurs par assentiment, cependant que les perdants de Condorcet peuvent ou non en faire partie ». La seule possibilité qu'il y ait plusieurs vainqueurs de Condorcet est qu'ils soient *ex æquo* entre eux, ce qui à l'échelle d'un grand pays est peu susceptible d'arriver. Par ailleurs, si l'on considère que pour la même raison, le vote par assentiment a peu de chances d'élire deux candidats, on peut donc considérer qu'un candidat est vainqueur par assentiment si et seulement si il est vainqueur de Condorcet.

Le vote par approbation respecte donc le critère de Condorcet et c'est là son gros avantage sur le scrutin à la pluralité simple, avec qui il partage beaucoup d'autres propriétés comme la monotonie ou le critère de renforcement.

### III.1.D Des reproches, oui mais ...

Brams et Fishburn furent parmi les premiers à décrire le scrutin par approbation. Nous reportons ici les reproches qu'on a pu adresser au vote par assentiment



tels que [Brams et Fishburn \[1983\]](#) les rapportent et y répondent. Nous ajoutons nos commentaires entre crochets.

1. *Dans le vote par approbation, les électeurs n'expriment pas leurs préférences totales, contrairement aux procédures des votes avec rangement.* Cet argument n'est pas vraiment recevable si l'on constate les pratiques actuelles. [Les méthodes avec rangement ne sont guères utilisées pour des élections officielles. On peut mentionner des exceptions notables comme l'Australie et l'Irlande, qui utilisent le vote préférentiel. Ce système n'est pas exempt de tout reproche, notamment celui d'encourager la falsification des préférences, par exemple en rangeant en dernier le concurrent potentiel de son favori.] Par ailleurs, il est probable que les méthodes avec rangement donnent un résultat très similaire au vote par approbation en cas de vote sincère.
2. *Le vote par approbation encourage la prolifération des candidats aux positions volontairement ambiguës.* Cela est peu probable, d'après Brams et Fishburn, notamment parce que les électeurs ne sont pas assez naïfs pour soutenir des candidats insipides. [Le même reproche pourrait être adressé au scrutin majoritaire. De nombreux auteurs, dont [Laslier \[2003a\]](#) ou [Brams \[1976\]](#), ont montré l'intérêt pour un candidat d'adopter une position ambiguë.]
3. *Le vote par approbation détruit la structure bipolaire de la vie politique.* Ce reproche se limite aux pays où le système politique est bipolaire. De plus, de nombreux autres facteurs influencent la structure des partis. [Notamment des facteurs historiques. Ce reproche fait écho à la loi de Duverger selon laquelle le scrutin majoritaire tend à faire converger la vie politique vers un système bipartite.] En l'absence d'expérimentation à grande échelle du vote par assentiment, un tel reproche est prématuré.
4. *Le vote par assentiment crée des inégalités entre les électeurs, en donnant plus de pouvoir à ceux qui donnent le plus d'assentiments.* [[Brams et Fishburn \[1983\]](#) montrent au contraire que le vote par approbation est plus équitable que le vote à la pluralité.]

À ces reproches, on pourrait ajouter celui de [Riker \[1982\]](#) selon lequel le vote par assentiment ne satisfait pas l'anonymat, c'est-à-dire le fait que deux électeurs ne peuvent pas échanger leur bulletin. Ce reproche est sans doute dû à une mauvaise compréhension par Riker du vote par approbation. Dans son contre-exemple p. 109, il considère en effet que le nombre de candidats pour lesquels chaque électeur vote

est propre à l'électeur. En permutant les bulletins des électeurs, c'est-à-dire les préférences, Riker ne fait pas changer en même temps le nombre d'assentiment que donne un électeur donné. Cette permutation change donc le résultat.

Alors que justement, le nombre d'assentiments qu'un électeur donne dépend exclusivement de la structure de la préférence<sup>3</sup> et non pas du nom de l'électeur. Si deux électeurs « échangent » leurs préférences, ils échangent aussi le nombre de candidats pour qui chacun va voter. Le vote par approbation est bien anonyme.

Notons également ici un avantage remarqué par **Brams et Fishburn [1983]** hors du champ des propriétés « théoriques » de ce mode de scrutin. Il est plus flexible que le vote à pluralité : il donne plus d'options et de façons de voter. L'électeur peut se servir du vote par approbation comme d'un scrutin à la pluralité, en ne votant que pour un seul candidat. S'il n'a pas de forte préférence pour un candidat en particulier, il peut voter pour beaucoup de candidats. Il peut voter pour tous les candidats sauf un s'il veut sanctionner un candidat qu'il déteste. Par ailleurs, si son candidat préféré a peu de chances d'être élu, il peut tout de même voter pour lui et d'autres, sans se lamenter d'avoir gâché son vote. Les candidats qui ne paraissent pas dans la course peuvent malgré tout recevoir des voix et gagner une certaine légitimité politique, alors que le scrutin à la pluralité aspire les voix des petits candidats vers les concurrents qui paraissent les plus solides.

Cette flexibilité accrue permettrait d'augmenter le taux de participation aux élections, puisqu'il n'y a pas de sentiment de gâcher son vote. Comme le vote par assentiment permet de donner « plusieurs voix », il ne contraint pas les électeurs dans un choix binaire ou ternaire et paraît ainsi un mode de scrutin plus sincère. Le résultat n'en sera perçu que plus légitimement. (On éviterait par exemple la situation du second tour des présidentielles françaises de 2002 dans lesquelles de nombreux électeurs se sont sentis piégés dans un choix binaire et réducteur, qui a abouti à l'élection de Jacques Chirac avec 82% des voix.)

### **III.2 L'expérience de Laslier et Van Der Straeten en 2002**

De nombreuses procédures de vote ont vu le jour en théorie du choix social, certaines d'une complexité mathématique impressionnante, qui intervient toujours au moment du dépouillement. Le problème est alors que la méthode employée a peu de légitimité : le vote apparaît alors comme une boîte noire dans laquelle sont

---

<sup>3</sup>La structure de la préférence fait ici référence à la façon dont la préférence d'un électeur est partitionnée en une ou plusieurs classes d'indifférence.

rentrés les bulletins et d'où sort un peu magiquement le résultat, sans que les électeurs ne puissent aisément vérifier ce résultat. L'avantage du vote par approbation est sa simplicité, ce qui ne nuit pas à sa qualité. Il peut donc être très facilement mis en place, comme le prouve l'expérience menée par [Laslier et Van Der Straeten \[2004\]](#) lors des présidentielles de 2002 en France.

### III.2.A Descriptif de l'expérience

L'expérience a eu lieu le 21 avril 2002 lors du premier tour des élections présidentielles, dans six bureaux de vote officiels. Dans ces bureaux, les électeurs se voyaient offrir en plus de voter par assentiment en un tour, dans une urne séparée et destinée uniquement à l'expérimentation, sur les mêmes candidats que la véritable élection présidentielle. Une fois leur vote officiel enregistré, ils avaient donc la possibilité d'essayer le vote par assentiment *in situ*.

« La description du principe du vote par assentiment retenue était volontairement très neutre et uniquement procédurale, de manière à laisser à l'électeur toute latitude dans l'interprétation de son acte de vote. »

[[Laslier et Van Der Straeten, 2004](#)]

Les objectifs principaux de cette expérience étaient de voir comment les électeurs réagissaient face à ce nouveau mode de scrutin et de tester les résultats comparativement à ceux du premier tour officiel.

### III.2.B Les résultats

#### III.2.B.1 Sur le mode de scrutin

Sur le mode de scrutin en lui-même, deux résultats essentiels sont à retenir. Le premier c'est que « le principe du vote par assentiment est facilement compris et accepté ». Quand on propose une méthode alternative au scrutin majoritaire habituel, un argument souvent entendu soutient qu'il est naturel et facile à comprendre. L'expérience montre que le principe est d'une part bien reçu par les votants, d'autre part bien compris. Le taux de participation est compris suivant les bureaux entre 66% et 90%. Le nombre moyen d'assentiments par électeur est de 2,9 ce qui montre que les électeurs n'ont pas hésité à utiliser la latitude du vote par assentiment pour réconcilier les deux tendances du scrutin majoritaire à deux

tours : le vote utile et le vote message<sup>4</sup>. Ce mode de scrutin est donc éminemment praticable.

Le second apport de cette expérience concernant le mode de scrutin, c'est qu'il donne des scores aux candidats différents de ceux du premier tour du scrutin majoritaire à deux tours, non seulement au niveau des bureaux de vote, même également si on les extrapole à l'échelle nationale. Selon la méthode utilisée, François Bayrou et Jean-Marie Le Pen arrivent en troisième ou quatrième place. Jacques Chirac arrive toujours en tête, suivi de Lionel Jospin. Jacques Chirac est approuvé par environ 37% des électeurs et Lionel Jospin par environ 31%. Pour comparer avec les résultats du scrutin officiel, il est plus simple d'exprimer les scores en pourcentage du nombre total des assentiments. Jacques Chirac a alors reçu 12,2% des assentiments contre 11% pour Lionel Jospin.

Comparé au premier tour du scrutin officiel, le vote par assentiment donne donc une hiérarchie modifiée, bien que le vainqueur soit le même. Jacques Chirac était sans doute le vainqueur de Condorcet de cette élection. Ces différences tendent aussi à confirmer l'hypothèse selon laquelle Lionel Jospin, présenté comme le concurrent annoncé de Jacques Chirac, aurait raté le second tour officiel à cause d'une dispersion des voix de gauche vers les plus petits partis. On constate également que le vote par assentiment a tendance à écraser les différences entre les candidats principaux et les candidats plus modestes. Il confirme également le laminage du « centre », puisque François Bayrou n'avait reçu que 6,8% des suffrages au premier tour officiel alors qu'il reçoit ici plus de 9% des assentiments et se rapproche ainsi nettement du couple de tête.

Le vote par assentiment donne une image sans doute plus juste de la répartition des poids politiques que ne le fait le scrutin majoritaire à deux tours. Comme l'avait anticipé **Brams et Fishburn** [1983], « it would give minority candidates their proper due. [...] Their supporters would not be torn away simply because there was another candidate who, though less appealing to them, was generally considered a stronger contender ». Des candidats comme Corinne Lepage ou Bruno Mégret, ayant des concurrents proches politiquement et présentés comme plus avancés dans la course, doubleraient ou tripleraient leur score avec le vote par assentiment.

---

<sup>4</sup>cf. Jean-Luc PARODI, 2002 : « L'énigme de la cohabitation ou les effets pervers d'une pré-sélection annoncée », *Revue française de science politique* vol. 52, p. 485-504. Cité par **Laslier et Van Der Straeten** [2004].

### III.2.B.2 Sur la structure de la vie politique française

Cette expérience nous renseigne également sur le paysage politique français. Un bulletin de vote par assentiment donne en effet beaucoup plus d'information qu'un bulletin de scrutin majoritaire. Comme il comporte les noms de plusieurs candidats, il est possible de savoir pour un candidat donné, quels sont les candidats qui sont approuvés sur les mêmes bulletins que lui. On en tire une matrice d'association sur laquelle on peut lire par exemple que 30% des électeurs qui ont donné leur assentiment à Jacques Chirac l'ont aussi donné à François Bayrou ; ou que 57% des électeurs ayant approuvé Christiane Taubira ont également approuvé Lionel Jospin.

On peut déduire de ces associations la proximité politique entre les différents candidats, non pas en fonction des programmes ou des habitudes intellectuelles, mais en fonction des associations qui sont effectivement observées. [Laslier et Van Der Straeten \[2004\]](#) en tirent une représentation spatiale des différents candidats en fonction de leur proximité relative, déduite des taux de transferts entre candidats. Nous ne partageons pas totalement l'avis des auteurs de cette expérience sur le plan politique. Néanmoins, la représentation spatiale prouve clairement que l'axe gauche-droite n'est pas réellement pertinent pour représenter la vie politique française, comme le prouve d'ailleurs le malaise de Laslier et Van Der Straeten à expliquer la position de Jean-Pierre Chevènement. Il existe certes un groupe de gauche de candidats relativement proches. En revanche la droite est plus dispersée et les candidats sont plutôt proches par paires : Jacques Chirac près d'Alain Madelin, Jean Saint-Josse et Jean-Marie Le Pen, etc. Les auteurs en concluent que

« ces chiffres ne mettent pas en évidence des groupes d'électeurs homogènes dans leurs approbations et donnent plutôt l'impression que les électorsats sont assez fortement enchevêtrés. »

Nous pensons que cette difficulté à distinguer les différents électorsats provient de la mauvaise habitude à linéariser la vie politique sur un axe gauche-droite. Cette représentation est certes pratique d'un point de vue intellectuel (elle permet par exemple l'hypothèse d'unimodalité évoquée au [I.3.B](#)). Elle permet par ailleurs aux candidats et aux partis de rendre leur positionnement plus lisible d'un point de vue médiatique. Mais cette représentation tend à une simplification du débat politique dans laquelle une « droite » et une « gauche » s'oppose systématiquement — publiquement du moins — pour des questions de lisibilité politique. Nous sommes davantage convaincus par une représentation tripartite du monde politique en trois

modes de pensées essentiels : la gauche, la droite et la démocratie libérale, qui renvoie aux fondements de pensées de ces différents courants<sup>5</sup>.

Nous espérons avoir présenté dans ce bref chapitre les grands avantages du vote par assentiment. Ses propriétés théoriques, et notamment sa propension à élire le vainqueur de Condorcet et sa monotonie en font un sérieux concurrent au scrutin majoritaire à deux tours employé en France. Son principe est simple et facilement compris ; contrairement à d'autres méthodes plus complexes, il peut donc être mis en place facilement pour les élections comportant trois candidats ou plus.

Par ailleurs, les résultats d'un scrutin par assentiment sont bien plus riches en enseignement que ceux du scrutin majoritaire. Ils permettraient une meilleure compréhension de la vie politique telle qu'elle est perçue et vécue par les électeurs. Cela ne pourrait qu'améliorer la qualité du débat politique en France, en sortant les problématiques d'alternatives binaires et systématiques de type majorité/opposition, et aboutir, du moins espérons-nous, à une véritable discussion idéologique des différentes positions politiques.

Enfin, nous pensons que la grande légitimité du résultat du vote par assentiment, combinée avec un débat plus riche, ne pourrait qu'inciter les citoyens à s'impliquer davantage dans le débat politique et lui faire retrouver le chemin des urnes, condition de l'expression démocratique.

---

<sup>5</sup>Le travail de Nemo [2002] est de ce point de vue d'une richesse et d'une acuité exemplaires.

## Chapitre IV

# Les paradoxes de la République

Après avoir considéré les problèmes qui peuvent survenir lors de l'élection d'un candidat, nous allons maintenant nous intéresser aux paradoxes qu'engendre la représentation des électeurs ou leur consultation. Le but du vote est de faire participer les citoyens aux affaires publiques, qui par essence les concernent. D'un point de vue pratique, il est possible de recueillir facilement les avis de tous les concernés lorsqu'il s'agit de petits comités. Dans l'Athènes antique, les citoyens pouvaient prendre directement part à l'*ecclesia*. Mais à l'échelle d'une nation, cela devient problématique car organiser une élection est coûteux et demande de respecter des procédures fastidieuses destinées à garantir que les élections soient justes.

La Constitution de la V<sup>e</sup> République prévoit que « la souveraineté nationale appartient au peuple qui l'exerce par ses représentants et par la voie du référendum » (art. 3). L'essentiel des décisions est donc pris par les représentants et le référendum institué comme mode de consultation exceptionnel, utilisé principalement à la discrétion du Président :

**Article 11** Le Président de la République, sur proposition du Gouvernement pendant la durée des sessions ou sur proposition conjointe des deux assemblées, publiées au Journal Officiel, peut soumettre au référendum tout projet de loi portant sur l'organisation des pouvoirs publics, sur des réformes relatives à la politique économique ou sociale de la nation et aux services publics qui y concourent, ou tendant à autoriser la ratification d'un traité qui, sans être contraire à la Constitution, aurait des incidences sur le fonctionnement des institutions.

La Constitution indique donc clairement deux moyens pour le peuple de gérer les affaires publiques : la consultation populaire et la représentation. Nous allons voir que des paradoxes sont inhérents à ces deux institutions.

Les représentants sont nécessaires pour la démocratie, c'est-à-dire pour que les citoyens contrôlent le déroulement des affaires publiques. Ils rendent faisable la prise de décision en exerçant leur pouvoir au nom des électeurs qu'ils représentent. Toutes les grandes démocraties comportent des chambres destinées à représenter les citoyens dans le processus de décision à différents échelons géographiques. En France métropolitaine, l'Assemblée nationale et le Sénat remplissent cette mission au niveau national tandis que les conseils régionaux, généraux et municipaux agissent au niveau local. Nous ferons essentiellement mention du Parlement de manière générale, mais nos remarques s'appliquent à tous les échelons de la pyramide territoriale. Nous allons voir que la représentativité de ces assemblées pose plusieurs problèmes (section IV.1).

Par ailleurs, le poids d'un électeur étant minime dans un grand pays, les nations se sont petit à petit dotées de partis destinés à faire peser les opinions concordantes de plusieurs citoyens. Nous verrons à la section IV.2) que l'existence de ces partis déforme la représentation des électeurs et donne lieu au paradoxe d'Ostrogorski qui semble remettre en cause leur légitimité à transcrire les aspirations du peuple. Nous verrons également dans cette section que le référendum, outil destiné à faire participer les citoyens directement à la vie politique, peut donner une image fautive du vœu des électeurs selon la façon dont sont présentées les questions.

### IV.1 Représentation et équité

Dans l'histoire des idées politiques, deux conceptions antagoniques de la représentation ont émergé :

« Ou bien les députés représentent vraiment leurs mandants, dont ils reçoivent le cas échéant, un « mandat impératif » [...]. Ou bien les députés sont réputés s'abstraire des intérêts locaux et sont considérés comme gestionnaires de l'intérêt indivis de l'État, leur pluralité servant seulement à maximiser les chances que tous les avis soient proposés et discutés, afin d'arriver à la décision finale la plus rationnelle. » [Nemo, 2002, p.631]

La Constitution française de 1958 prouve que cette alternative n'a pas été tranchée sur le plan idéologique de manière claire. L'article 27 précise certes que « tout



mandat impératif est nul », c'est-à-dire qu'un membre du Parlement n'a pas de devoir à l'égard du groupe particulier de citoyens qu'il pourrait représenter. Pourtant, la Constitution explicite le rôle du Sénat dans l'article 24 : « [il] assure la représentation des collectivités territoriales de la République ». Or que peut être l'intérêt d'une telle représentation si ce n'est de tenter d'accorder les volontés divergentes de chacune des collectivités ?

Il semble cependant que la seconde option soit plus clairement retenue dans le fonctionnement du Parlement, puisqu'il est chargé de voter les lois, lesquelles s'appliquent à tous dans la République. Il s'agit de représenter les différentes opinions des citoyens dans le débat politique et dans le choix des orientations du pays.

Les différences de modes de scrutin utilisés pour l'élection des différentes assemblées représentatives témoignent d'une ambiguïté de position entre ces deux conceptions de la représentation. Quand le représentant est considéré comme mandataire d'un groupe particulier, en général délimité géographiquement, un scrutin de nature majoritaire est plus logique en ce qu'il élit un représentant par circonscription électorale. Ceux qui conçoivent au contraire la représentation comme un outil de gestion de l'intérêt de toute la collectivité prône une vision de l'assemblée comme microcosme de la société ; le scrutin proportionnel permet alors de représenter les idées et les intérêts à la mesure de leur existence dans la société. Aucun des deux modes de scrutin ne permet une représentation équitable de la société.

### IV.1.A La représentation par circonscription

En France, les députés de l'Assemblée nationale sont élus par 577 circonscriptions, à raison d'un siège par circonscription<sup>1</sup>. Chaque député est élu au scrutin majoritaire à deux tours. Nous allons nous intéresser ici au problème de la justesse de la représentation par circonscription. Une première source d'iniquité provient du découpage même des circonscriptions. Puisqu'il y a un député par circonscription et que l'on souhaite dans un souci démocratique une égale représentation des citoyens, il faut que les circonscriptions soient de population égale. Étant donnés les mouvements de population que connaît le territoire, l'article L.125 du Code électoral prévoit que le dessin des circonscriptions s'adapte : le découpage doit être

---

<sup>1</sup>Le terme de circonscription est ambigu. Il désigne d'une manière générale une subdivision territoriale délimitant la portée géographique d'un scrutin. Dans son acception plus spécifique, la circonscription est la subdivision territoriale pour laquelle est élu un membre de l'Assemblée nationale. Sauf mention contraire ou contexte explicite, nous l'utilisons dans le sens général.

refait après deux recensements. Le découpage actuel des circonscriptions a été fait sur la base du recensement de 1982, devrait donc être redessiné prochainement, en conséquence du recensement de 1999. Les inégalités de l'époque sont encore plus marquées aujourd'hui comme le notent **Balinski et Baïou [2002]** :

En conséquence, les inégalités des tailles de leurs populations — déjà exagérées selon le recensement de 1982 — sont aujourd'hui amplifiées jusqu'à des disproportions fantasques. La 2<sup>e</sup> circonscription de Lozère recense 34 374 habitants, la 2<sup>ème</sup> du Val-de-Marne 188 200 : un habitant de la 2<sup>ème</sup> circonscription de la Lozère est donc 5,5 fois mieux représenté qu'un habitant de la 2<sup>e</sup> du Val-de-Marne !

Le principe d'égalité entre les électeurs n'est donc pas respecté puisqu'il faut 95 000 voix pour élire un député en Val-de-Marne contre 17 000 en Lozère. Certes le découpage destiné à minimiser les inégalités semble relever du casse-tête, d'autant que les circonscriptions doivent coïncider avec les limites des départements. Par ailleurs, ce découpage est d'autant plus complexe qu'il y a de circonscriptions. L'apport de l'informatique permet néanmoins de résoudre ces problèmes avec un succès, comme le montre le redécoupage réussi des *counties* du New Jersey dans les années 1970. Encore faut-il qu'une volonté politique décide ce redécoupage, et elle semble tarder en France.

Par ailleurs, on peut légitimement craindre qu'un tel mode de représentation favorise nettement les grands partis. Malgré les effets pervers du scrutin majoritaire à deux tours, et par définition, les grands partis arrivent plus souvent en tête de chacune des circonscriptions. Cela a pour effet de sur-représenter le parti majoritaire par rapport à son concurrent le plus proche et d'écraser les petits partis. D'où un effet de bipolarisation de la représentation politique.

	Communistes	Socialistes	UDF	UMP	Reste
Nbre de sièges	21 (3,7%)	141 (21,7%)	29 (5,2%)	365 (65,5%)	21 (3,8%)
Score	4,82%	24,11%	4,85%	33,3%	32,92%

TAB. IV.1.1 – Composition de l'Assemblée nationale et scores aux élections législatives de 2002

On constate sur le tableau [IV.1.1](#) la nette sur-représentation du grand parti. L'UMP s'assure deux tiers des sièges à l'Assemblée nationale alors qu'elle n'a recueilli aux élections législatives de 2002 qu'un tiers des suffrages. Le scrutin majoritaire par circonscription amplifie l'avance du leader ; en 2002, le facteur

d'amplification pour l'UMP a été de presque deux. De la même manière, ce type d'élection écrase légèrement la représentation du Parti socialiste et nettement les petits partis. (L'exception de l'UDF provient d'un transfert de membre d'un groupe parlementaire à l'autre.) On constate surtout que seuls 21 députés représentent les petits partis, qui ont pourtant recueilli ensemble un tiers des suffrages au niveau national. Avec ce système électoral, de nombreux petits partis ne sont pas du tout représentés. Comme le remarque Bon [1978] :

Les partis minoritaires sont toujours majoritaires dans un certain nombre de circonscriptions. De ce fait, ils sont représentés nationalement. En revanche, un phénomène dérivé de ce principe général se rencontre fréquemment : *la quasi-élimination, au niveau de la représentation parlementaire, d'un parti qui a obtenu une minorité substantielle des voix.*

Le scrutin majoritaire par circonscription crée donc deux problèmes. Premièrement, ce système peut évidemment créer d'importantes distortions entre le nombre de voix obtenues au niveau national et la représentation effective, comme nous venons de le voir. Bon [1978] cite un exemple encore plus flagrant : le *Parti Libéral anglais* qui en 1976 avait obtenu 19,4% des suffrages exprimés, mais n'avait pu placer que 14 députés sur les 600 *MPs*.

Ce qui nous amène au second problème, le succès d'un parti dépend essentiellement de sa répartition géographique. Cela permet aux partis minoritaires d'être majoritaires dans certaines circonscriptions, c'est l'existence de zones géographiques dans lesquelles un courant politique est traditionnellement sur-représenté, ce qu'on appelle souvent un *fief* politique. Mais cela peut disparaître si le territoire devient plus homogène, notamment avec une plus grande mobilité des personnes et l'affaiblissement des identités locales ou régionales. On peut donc s'interroger sur la pertinence d'un système qui n'assure la représentation des minorités au niveau national que par le fait d'« accidents » dans la répartition géographique des opinions politiques. Par ailleurs, les ententes entre le premier et le deuxième tour permettent aux petits partis d'obtenir des sièges grâce aux reports de voix.

On peut répondre à ces deux questions en soulignant le fait que l'Assemblée ne se veut pas une représentation en miniature de la société française. Cela n'est compris que si l'on admet la conception « mandataire » du député, conception qui entraîne que le scrutin soit majoritaire pour chaque circonscription. Dans ce cadre conceptuel, il n'est pas pertinent de considérer les différences qui peuvent exister

entre la popularité nationale d'un courant et sa représentation effective à l'Assemblée nationale.

### IV.1.B La représentation proportionnelle

Cette distortion qu'induit la représentation majoritaire est le reproche essentiel que lui ont adressé les partisans de la représentation proportionnelle. Ces derniers considèrent plus l'assemblée comme une juste représentation de la population qui l'a élue. Il faut donc que le mode de scrutin retranscrive fidèlement les différents courants de pensée en proportion de leur succès. Le fonctionnement est simple : accorder proportionnellement autant de sièges à une liste qu'elle a reçu de voix. Le scrutin proportionnel est utilisé en France pour les élections européennes et pour les élections sénatoriales dans les départements qui élisent moins de cinq sénateurs. Les élections régionales peuvent également être considérées comme des élections proportionnelles, de même que les élections européennes bien qu'elles s'appuient sur des circonscriptions.

Le premier problème découle de l'objectif principal de la proportionnelle : assurer la représentation des courants minoritaires. Le but est d'obtenir une assemblée réellement représentative des différents courants politiques de la société. Ce procédé entraîne donc un morcellement de l'assemblée entre les différents courants, ce qui rend difficile le fonctionnement de l'assemblée pour la prise de décision. Comme nous l'avons vu précédemment, plus les préférences des électeurs devant se prononcer sont hétérogènes, plus elles sont difficiles à agréger. Les partis doivent donc pour prendre des décisions former des alliances entre eux, ce qui augmente le côté stratégique de la délibération collective et, partant, les chances que certaines factions n'agissent pas sincèrement. Dès lors ces groupes en question ne représentent plus fidèlement les préférences pour lesquelles ils ont été élus, ce qui biaise la représentation démocratique. Les comportements stratégiques sont d'autant plus probables que dans une assemblée, on connaît facilement les préférences des différents groupes, ce qui augmente l'incitation à ne pas se prononcer en accord avec ses préférences réelles. Les petits partis troublent la prise de décision et n'ont pas de réel pouvoir ; ils sont obligés de se rallier avec d'autres, au détriment de leurs convictions politiques. C'est pourquoi les élections d'assemblée en France comportent toutes un seuil de représentativité. Les partis n'ayant pas atteint ce seuil (au premier ou second tour selon l'élection) n'obtient aucun siège.

Dans l'assemblée, il n'existe pas de majorité stable, elle varie au contraire au gré des alliances entre les partis. Il est difficile dans ces circonstances de mener

une politique suivie et de prendre de mesure d'envergure. L'exercice est alors fait de petites mesures car tout « plan d'action » est entravé par l'instabilité du pouvoir de décision. Le phénomène peut être aggravé par la présence d'un parti-arbitre. Si deux partis opposés ont chacun une part importante des sièges sans qu'aucun n'ait la majorité absolue, un troisième parti peut jouer le rôle d'arbitre en décidant de faire pencher la balance en faveur de l'un ou l'autre des partis. Ce troisième parti jouit d'un important pouvoir de décision ; il n'a pas à lui seul le pouvoir d'imposer ses mesures, mais il peut décider pour l'une ou l'autre option. Par ailleurs, il peut marchander ses voix en échange de concessions sur d'autres mesures. L'objectif de respect des différents courants est peut-être atteint, mais concrètement la répartition des pouvoirs n'est pas à la mesure de l'importance populaires des partis. C'est d'ailleurs ce genre de situations qui a motivé l'instauration en 2003 d'une « prime à la majorité » aux élections régionales : le parti arrivé en-tête reçoit d'emblée 25% des sièges, les 75% restant étant répartis à la représentation proportionnelle<sup>2</sup>.

Nous allons maintenant voir que la répartition des sièges entre les différentes listes ne va pas sans poser des problèmes. En effet, le nombre de postes à pourvoir est toujours beaucoup plus réduit que le nombre de votants. Il est donc impossible de respecter l'exacte proportion décimale des voix car on ne peut pas diviser un siège en plusieurs.

Les calculs se font toujours en deux temps. La première attribution est faite à partir d'un quotient électoral qui peut être déterminé à l'avance (quotient fixe), ou, cas le plus fréquent en France, être calculé en divisant le total des suffrages exprimés dans la circonscription par le nombre de sièges à pourvoir. Ce quotient est égal au nombre de voix nécessaire pour avoir un siège. Il existe en réalité plusieurs types de quotients, mais on n'utilise en France que le quotient simple :  $Q = V/S$  où  $V$  et  $S$  désignent respectivement le nombre de voix et le nombre de sièges à pourvoir.

Dans un premier temps, chaque liste obtient autant de sièges qu'elle a atteint de fois le quotient électoral. Si une liste  $i$  reçoit  $v_i$  voix, il recevra donc  $s_{i1} = \text{ent}\left(\frac{v_i}{Q}\right)$  sièges (où *ent* signifie qu'on ne garde que la partie entière du ratio, puisqu'on ne peut pas partager de siège). Mais cette première répartition laisse des restes, c'est à dire des sièges non pourvus. C'est l'existence de ces restes qui pose problème. On distingue en général deux grands types de méthodes s'appuyant sur les quotients

---

<sup>2</sup>Un mécanisme similaire est utilisé pour les élections municipales. La liste qui obtient le plus de voix se voit attribuer un nombre de sièges égal à la moitié des sièges à pourvoir.

pour répartir les sièges, qui ne donnent pas les mêmes résultats : aux plus forts restes, et à la plus forte moyenne.

La répartition aux plus forts restes (dite aussi *méthode Hamilton*) implique que dans chaque circonscription, les sièges non pourvus soient attribués à chaque liste selon l'ordre décroissant des suffrages inemployés après la première répartition. Cette méthode n'est pas parfaite, comme nous le voyons avec un exemple tiré de [Martin \[1997\]](#).

Partis	Voix	1 <sup>re</sup> attrib.	Restes	Attrib. aux restes	Total
<i>a</i>	61 000	3	1 000	0	3
<i>b</i>	29 000	1	9 000	0	1
<i>c</i>	10 000	0	10 000	1	1

TAB. IV.1.2 – Plus forts restes : 1<sup>re</sup> élection

Supposons une circonscription de 100 000 voix devant pourvoir un conseil de cinq sièges. Le quotient électoral est alors de 20 000. Les voix que se répartissent trois partis comme indiqué dans le tableau [IV.1.2](#). Cette méthode avantage les petites formations, surtout dans les petites assemblées, notamment celles qui n'ont pas réussi à obtenir le quotient électoral mais qui s'en sont approchées et disposent de forts restes, comme le montre le cas du parti *c* qui obtient le même nombre de siège que *b* avec trois fois moins de voix. C'est une première entorse à la représentativité.

Partis	Voix	1 <sup>re</sup> attrib.	Restes	Attrib. aux restes	Total
<i>a</i>	55 000	2	15 000	1	3
<i>b</i>	33 000	1	13 000	1	2
<i>c</i>	12 000	0	12 000	0	0

TAB. IV.1.3 – Plus forts restes : 2<sup>e</sup> élection

Imaginons maintenant que le parti *a* perde le soutien de 6000 électeurs, 4000 votant désormais pour *b* et 2000 pour *c*. L'élection suivante donne alors la répartition indiquée dans le tableau [IV.1.3](#). En perdant des voix, le parti *a* a perdu un siège attribué au quotient ; mais ayant ainsi augmenté ses restes, l'a regagné à l'attribution aux plus forts restes. Mais les voix qu'il a données à *b* permettent à celui-ci d'obtenir le second plus fort reste et ainsi de gagner un siège. Le paradoxe, que [Balinski \[2002b\]](#) appelle « plus-pour-tous, moins-pour-un » est alors le suivant : le parti *c* bien qu'ayant gagné des voix a perdu un siège. Une variante de ce paradoxe, dite « paradoxe de l'Alabama », a poussé les Américains à abandonner cette méthode à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle.

Partis	Voix	1 <sup>re</sup> distrib.	Total PFR	Total PFM
<i>a</i>	43 000	2	2	3
<i>b</i>	28 000	1	1	1
<i>c</i>	17 000	0	1	1
<i>d</i>	12 000	0	1	0

TAB. IV.1.4 – Proportionnelle : plus forts restes et plus forte moyenne

Il convient de mentionner l'autre méthode à quotient : la répartition à la plus forte moyenne, qui fut utilisée une fois sous la v<sup>e</sup> République, pour l'unique élection à la proportionnelle de l'Assemblée nationale en 1986. Dans la répartition à la plus forte moyenne, il s'agit de calculer quelle serait pour chaque liste la moyenne des suffrages obtenus par sièges attribués si on accordait fictivement à chacune d'elle un siège supplémentaire. La liste qui obtient la plus forte moyenne reçoit un siège. L'opération se répète autant de fois qu'il reste de sièges à pourvoir<sup>3</sup>. Cette répartition ne donne pas les mêmes résultats que la méthode aux plus forts restes comme le montre le tableau IV.1.4, dans lequel nous avons simulé l'attribution de 5 sièges dans une circonscription de 100 000 électeurs avec chacune des méthodes. La méthode de la plus forte moyenne tend à favoriser les grands partis : elle attribue les restes aux deux partis les plus forts, alors que la méthode des plus forts restes les attribuent aux deux plus petits partis. En France, c'est toujours la méthode des plus forts restes, très biaisée, qui est utilisée dans les scrutins proportionnels.

Le même genre de problème de partage se pose lorsqu'il faut décider comment partager le nombre fixe de sièges de l'Assemblée nationale parmi les 100 départements. Cela revient à considérer la population d'un département comme le score d'un parti. Nous l'avons vu, la méthode de la plus forte moyenne (PFM) conduirait dans cette situation à une « hyperencéphalie » c'est-à-dire une sur-représentation des gros départements, alors que la méthode des plus forts restes PFR favoriserait au contraire les petits. Le dernier partage des sièges de l'Assemblée nationale s'est fait avec une méthode de diviseur. Cette répartition donne de fortes inégalités, d'autant qu'elle s'appuie sur le recensement de 1982 ; elle a pénalisé les petits départements, qui comptent en moyenne 1 député pour 90 000 habitants, alors que les grands comptent en moyenne 1 député pour 109 951 habitants [Balinski, 2002b].

Contrairement à une méthode à quotient, comme la PFM ou la PFR, une méthode de diviseur consiste à diviser successivement la population d'un département

<sup>3</sup>Le lecteur pourra se reporter à Martin [1997] pour le fonctionnement détaillé de cette méthode.

(ou le nombre de voix d'un parti) par une série d'entiers, les *diviseurs*, et l'on attribue les sièges suivant les nombres les plus élevés obtenus lors de cette opération.

1. « On choisit un diviseur commun  $x$  (par exemple, pour commencer, l'attribution idéale d'une des circonscriptions,  $x_i = P/h$ , c'est-à-dire la population totale  $P$  divisée par le nombre  $h$  total de sièges à pourvoir).
2. On calcule pour toutes les circonscriptions les quotients  $q_i = p_i/x$  (on divise la population  $p_i$  de chaque département par  $x$ ) ; si un quotient  $q_i$  est entre les entiers  $n$  et  $n + 1$ , on l'arrondit, selon les seuils de la méthode utilisée, « en bas » à sa partie entière  $n$  ou « en haut » à l'entier  $n + 1$ .
3. On attribue temporairement à chaque département  $i$ , soit l'arrondi, soit, s'il est inférieur au minimum garanti à tous les départements, ce minimum.
4. Si la somme de ces attributions est le total voulu  $h$ , cette allocation est la bonne ; si la somme est inférieure, un diviseur commun plus petit que  $x$  est choisi ; si la somme est supérieure, un diviseur plus grand que  $x$  est choisi, jusqu'à ce que la somme des attributions donne le total voulu. » [Balinski, 2002b]

Les différentes méthodes de diviseur consiste à choisir des règles différentes pour l'arrondi de  $q_i$ . Balinski explique que parmi ces méthodes, celle de Sainte-Laguë donne en pratique une répartition presque parfaite. Le biais de la méthode, qui avantage parfois les grands départements, parfois les petits, est presque nul au total car le nombre de départements est grand. Il serait sans doute temps de l'institutionnaliser une fois pour toutes.

### IV.1.C Le paradoxe du référendum

Nous avons vu que le problème de la représentation d'une population dans une assemblée est complexe. Ni l'approche majoritaire ni l'approche proportionnelle ne donne un poids réellement identique aux électeurs. La condition de la représentation est en conséquence essentiellement faussée. Le paradoxe du référendum nous montre en plus qu'une assemblée ne représente pas toujours correctement le vœu de ses électeurs. Pour expliquer ce paradoxe, nous nous inspirons du travail limpide de Nurmi [1999].



	Circonscriptions					
	C1	...	C150	C151	...	C200
oui	7 000	...	7 000	15 000	...	15 000
non	8 000	...	8 000	0	...	0
député	non	...	non	oui	...	oui
	⏟			⏟		
	150 non			50 oui		

TAB. IV.1.5 – Le paradoxe du référendum

Supposons qu’une décision de type binaire oui/non doivent être prise dans un pays. Ce pays est divisé en 200 circonscriptions, comptant chacune pour plus de simplicité 15 000 habitants et représentée chacune par un parlementaire. Nous avons noté dans le tableau IV.1.5 la répartition des avis sur la question binaire et le vote du député, qui par honnêteté suit la majorité de sa circonscription.

Nous voyons alors apparaître le *paradoxe du référendum*. Le texte, soumis au référendum populaire, est approuvé car il reçoit :

$$150 \times 7\,000 + 33 \times 15\,000 = 1\,800\,000 \quad \text{oui}$$

$$167 \times 8\,000 = 1\,550\,000 \quad \text{non}$$

Quand il est appelé devant le parlement pour la décision finale, le texte reçoit de la part des députés 150 votes défavorables contre 50 favorables. La décision des parlementaires va à l’encontre de celle de la population, alors même que chacun des députés croit représenter le mieux sa circonscription. Ce paradoxe remet en cause deux choses. La première c’est l’intérêt même d’un référendum consultatif. On peut en effet se demander ce qui doit primer entre le résultat du référendum et le vote des représentants en cas de désaccord. Si l’on accorde la primauté aux derniers, quel est l’intérêt d’un tel référendum ? Si l’on veut que la volonté du peuple (qu’on obtient facilement dans le cadre d’un vote binaire) soit respectée, pourquoi faire voter les parlementaires ?

La seconde chose que ce paradoxe remet en cause, c’est la possibilité même d’un mandat impératif. Si l’on considère — comme le laisserait suggérer leur mode d’élection — que les députés doivent représenter la circonscription dont ils sont issus, les décisions collectives d’un tel parlement, quoique de bonne foi, peuvent aller à l’encontre de la volonté générale sur des questions binaires. Il est dès lors inutile, ou *inefficace* dirons-nous, d’imposer un mandat impératif aux représentants, c’est-à-dire d’exiger d’eux qu’ils s’engagent au moment de leur élection sur

un certain nombre de questions précises. Les paradoxes suivants corroborent ce résultat.

### IV.2 Les paradoxes de la consultation populaire

Le référendum constitue le second outil du gouvernement par le peuple. Il semble particulièrement légitime puisque les citoyens sont directement interrogés sur des problèmes importants, concernant les grandes orientations du pays. Ce processus reste relativement exceptionnel en France. Par exemple sous la 5<sup>e</sup> République, huit référendums ont été organisés jusqu'à présent :

- 8 janvier 1961 : sur l'autodétermination en Algérie ;
- 8 avril 1962 : sur les accords d'Évian et l'indépendance de l'Algérie ;
- 28 octobre 1962 : sur l'élection du président de la République au suffrage universel direct ;
- 27 avril 1969 : sur l'organisation des régions et la réforme du Sénat ;
- 23 avril 1972 : sur l'élargissement des Communautés européennes ;
- 6 novembre 1988 : sur l'autodétermination en Nouvelle-Calédonie ;
- 20 septembre 1992 : sur la ratification du traité de Maëstricht ;
- 24 septembre 2000 : sur le quinquennat.

Le référendum porte en général sur un sujet concernant un choix politique majeur et qui concerne la nation dans son ensemble. Si plusieurs sujets sont évoqués, il est en général fait recours à une question par sujet, comme le montre l'exemple du référendum de 1945. Mais parfois deux sujets sont évoqués dans la même question, ce qui rend la réponse à donner ambiguë. Par exemple, la consultation de 1969 demandait aux Français s'ils approuvaient « le projet de loi soumis au peuple français par le président de la République et relatif à la création de régions et à la rénovation du Sénat ». Ces deux questions étaient relativement indépendantes l'une de l'autre et furent pourtant posées en même temps. Nous allons voir dans cette section que le fait de faire porter une consultation sur plusieurs sujets brouille les réponses.

#### IV.2.A Le paradoxe des trois référendums

Il s'agit de montrer ici qu'en proposant un référendum portant sur trois projets 1, 2 et 3 et exigeant une réponse binaire de type oui/non, qu'on arrive à un résultat contradictoire avec le vœu de la majorité. Notre exemple est tiré de [Laslier \[2004a\]](#). Supposons que les trois projets soient totalement indépendants, c'est-à-dire que l'acceptation ou le refus de l'un n'ait aucune conséquence sur la réalisation d'un

autre. Il est alors possible qu'un seul projet soit réalisé, ou deux, ou les trois, ou aucun. Il est demandé à chaque électeur de dire pour chaque projet, si oui ou non il désire qu'il soit réalisé : la réponse d'un électeur est donc un triplet, par exemple (O,O,N) : oui aux projets 1 et 2 et non au troisième. Il y a six votes possibles.

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
(O,N,N)	(N,O,N)	(N,N,O)
(O,O,N) $\approx_1$ (O,N,O)	(O,O,N) $\approx_2$ (N,O,O)	(N,O,O) $\approx_3$ (O,N,O)
(O,O,O)	(O,O,O)	(O,O,O)
(N,N,N)	(N,N,N)	(N,N,N)
(N,O,N) $\approx_1$ (N,N,O)	(O,N,N) $\approx_2$ (N,N,O)	(N,O,N) $\approx_3$ (O,N,N)
(N,O,O)	(O,N,O)	(O,O,N)

TAB. IV.2.6 – Paradoxe des trois référendums

Supposons que les individus sont séparés en trois groupes 1, 2 et 3 de taille égale, tels que le groupe 1 s'intéresse d'abord à la réalisation du projet 1, et à la non-réalisation des deux autres projets. Si un seul des deux autres projets est réalisé, il est indifférent à ce que ce soit le deuxième ou le troisième. Le profil de ces préférences (dites *séparables*) est donné par le tableau IV.2.6.

Comme chacun des projets est désiré par un groupe mais rejeté par les deux autres. Il est clair qu'aucun projet ne devrait se réaliser : l'option (N,N,N) est donc celle qui va être choisie si un référendum est organisé sur ces trois questions. Pourtant on peut constater que l'option (O,O,O) qui consiste au contraire à réaliser les trois projets est unanimement préférée à (N,N,N). Ce paradoxe est donc une violation de la condition d'unanimité de Arrow. On aboutit à la situation surprenante qu'aucun des projets ne sera réalisé alors que tous les individus auraient préféré que tous soient adoptés.

### IV.2.B Le paradoxe d'Ostrogorski

Le paradoxe d'Ostrogorski est très similaire à celui des trois référendums. Il tire son nom de Mosei Ostrogorski, « one of the most virulent critics of modern politics » [Lagerspetz, 1996]. La paternité d'un tel paradoxe revient cependant à Douglas Rae et Hans Daudt<sup>4</sup> qui le nommèrent ainsi car comme nous allons le voir, ce paradoxe constitue un argument contre la pertinence des partis politiques.

Imaginons, comme Nurmi [1999], un pays dans lequel deux partis *G* et *D* s'opposent dans une élection. La campagne électorale se concentre sur trois sujets 1,

<sup>4</sup>Douglas RAE et Hans DAUDT, 1976 : « The Ostrogorski Paradox : a Peculiarity of Compound Majority Decision », *European Journal of Political Research* vol. 4 n°4, pp. 391–398.

	A (20%)	B (20%)	C (20%)	D (40%)
Projet 1	D	G	G	D
Projet 2	G	D	G	D
Projet 3	G	G	D	D
Vote	G	G	G	D

TAB. IV.2.7 – Paradoxe d’Ostrogorski

2 et 3 sur lesquels les partis ont des positions différentes. La population est elle divisée en quatre groupes désignés par *A*, *B*, *C* et *D* de tailles inégales. *A*, *B* et *C* comptent chacun 20% de la population tandis que *D* regroupe 40% des électeurs. Les opinions de la population sont indiquées dans le tableau IV.2.7. L’intersection entre la colonne *A* et la ligne Projet 1 indique que le groupe d’électeurs *A* adopte la position du parti *D* concernant le Projet 1. Dans l’élection opposant les partis *G* et *D*, chaque groupe d’électeur vote pour le parti avec lequel il est d’accord sur le plus de sujets.

Comme on peut le voir, sur chacun des sujets, le parti *G* adopte une position minoritaire : sur chaque sujet, seulement 40% de la population le soutient. Et pourtant, c’est *G* qui gagne l’élection. Un parti peut donc être élu tout en ayant sur *chaque* sujet une position minoritaire. Notons que nous avons présenté une version « dramatique » du paradoxe dans laquelle *D* est majoritaire sur *chaque* des projets mais n’est pas élu. C’est la définition stricte du paradoxe qu’ont donnée Rae et Daudt. On peut cependant envisager une version plus large (celle de Bezembinder et Van Acker<sup>5</sup>) dans laquelle *D* a une position majoritaire sur une majorité de sujets mais pas nécessairement tous. Cela correspondrait au cas où le groupe *A* de notre exemple avait une position unanime (*G, G, G*). Dans ce cas, le parti *D* ne serait plus majoritaire sur le Projet 1 mais resterait néanmoins majoritaire sur les projets 2 et 3.

Ce paradoxe fournit une critique de la représentation des idées par les partis ou les candidats. Dans les chapitres précédents, nous avons en quelque sorte considéré le soutien à un parti ou un candidat comme quelque chose d’exclusif, préférer un candidat implique ne pas préférer les autres. Cela revenait à ne considérer que la dernière ligne du tableau IV.2.7. Nous voyons ici que la réalité est plus complexe si l’on considère que plusieurs sujets sont effectivement sujets de débat dans une campagne électorale. Dès lors un électeur peut être en accord avec un parti/candidat

<sup>5</sup>T. BEZEMBINDER et P. VAN ACKER, 1985 : « The Ostrogorski Paradox and Its Relation to Nontransitive Choice », *Journal of Mathematical Sociology* vol. 11, pp. 131–158.

sur un sujet mais avec un autre candidat/parti sur un sujet différent. Un candidat qui est majoritaire sur chacun des sujets peut alors ne pas être élu. C'est le cas si ces majorités ne coïncident pas. Un parti élu dans une telle circonstance mènerait une politique qui frustrerait sur chacun des projets, une majorité d'électeurs.

### IV.2.C Le paradoxe d'Anscombe et des élections multiples

Le paradoxe d'Anscombe est, de même que le paradoxe d'Ostrogorski, un paradoxe de majorité composée. Mais cette fois-ci les votes ne se font pas sur un programme mais séparément pour chaque sujet. Cela revient à organiser un référendum pour chacun des projets, plutôt que de voter pour un parti en fonction de son projet global. Le paradoxe d'Anscombe consiste à remarquer qu'une majorité d'électeurs peut être mécontente sur une majorité de sujets. Pour illustrer ce paradoxe, reprenons l'exemple de [Lagerspetz \[1996\]](#).

	A	B	C	D	E	Vote majoritaire
Projet 1	x	y	y	x	x	x
Projet 2	y	x	y	x	x	x
Projet 3	y	y	x	x	x	x

TAB. IV.2.8 – Paradoxe d'Anscombe

Trois projets totalement indépendants sont soumis à la consultation populaire. Pour chacun des projets, deux options  $x$  ou  $y$  sont envisageables (oui ou non par exemple). Supposons que la population soit séparée en cinq portions  $A \dots E$  de tailles égales dont les préférences sont indiquées dans le tableau [IV.2.8](#) (nous reprenons le même profil que précédemment, en séparant simplement  $D$  en deux). Le vote par projet se fait à la majorité simple et donne toujours l'option  $x$  gagnante. Si l'on regarde la situation pour les groupes  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on s'aperçoit qu'il y a toujours deux projets pour lesquels ils sont mécontents. On peut donc dire qu'une majorité des électeurs est mécontente sur une majorité de projets. Dans ce cas, un sondage donnerait une image renversée : une majorité de citoyens approuvent chaque décision (puisque la décision est prise au vote majoritaire), mais *simultanément*, une majorité de citoyens peut se plaindre que la plupart des décisions sont prises contre leur gré.

Une version, plus troublante encore, est donnée par Scarsini<sup>6</sup>. Soient  $k$  projets binaires, un vote est organisé pour chacun d'eux ; une préférence pour un électeur

<sup>6</sup>M. SCARSINI, 1998 : « A Strong Paradox of Multiple Elections », *Social Choice and Welfare* vol. 15, pp. 237–238.

est un  $k$ -uplet de oui/non. D'après Scarsini, il se peut que pour *aucun* votant, sa préférence ne coïncide avec le résultat général sur plus de  $\text{ent}\left(\frac{k+1}{2}\right)$ . Par exemple, si une élection porte sur six projets, et que le vainqueur est  $(X, X, X, X, X, X)$ , alors il se peut qu'aucun des votants n'ait eu de stratégie comportant  $X$  sur plus de quatre sujets [Nurmi, 1999]. Il s'agit d'un contre-argument à Ostrogorski, qui prônait la prééminence du référendum projet par projet sur le référendum par programme électoral.

#### IV.2.D Le paradoxe discursif : un résultat d'impossibilité

On conçoit ici que les paradoxes d'Ostrogorski et d'Anscombe sont très liés ; ils découlent d'un problème de majorité composée, c'est-à-dire qu'une majorité sur un sujet ne coïncide pas avec une majorité sur un autre sujet. Ces deux paradoxes constituent les deux facettes d'un même problème : *le paradoxe discursif*. C'est, comme le définissent List et Pettit [2002a], le fait que le vote sur chacune des composantes des programmes ne donne pas le même résultat que le vote sur les programmes entiers.

Une condition suffisante et probablement nécessaire pour que le paradoxe discursif n'apparaisse pas a été identifiée par Laffond et Lainé<sup>7</sup> : c'est la condition de *single-switch* sur le profil de préférence.

**Définition (Single-switch)** *Pour un individu  $i$ , soit  $Oui(i)$  les projets qu'il souhaite voir réalisés et  $Non(i)$  les autres. Le profil de préférence vérifie la condition de single-switch si*

$$\forall i, j \quad \text{on a soit } Oui(j) \subseteq Oui(i) \quad \text{soit } Oui(j) \subseteq Non(i)$$

Dans notre exemple du paradoxe d'Ostrogorski, on peut constater que cette condition n'est pas remplie. Supposons que le parti  $G$  approuve tous les projets et que le parti  $D$  les rejette tous. Alors on a  $Oui(A) = \{\text{Projets 2 et 3}\}$  qui n'est pas inclus dans  $Oui(B) = \{\text{Projets 1 et 3}\}$  ni dans  $Non(B) = \{\text{Projet 2}\}$ . La condition de *single-switch* est si contraignante que l'on ne peut pas éviter le paradoxe d'Ostrogorski ou d'Anscombe n'apparaisse.

C'est en ce sens que List et Pettit ont émis un théorème d'impossibilité, très semblable à celui de Arrow [List et Pettit, 2002b]. Au lieu de définir la fonction de choix social sur les préférences individuelles à propos d'un unique sujet , ils

---

<sup>7</sup>Gilbert LAFFOND et Jean LAINÉ, *Single-switch preferences and the Ostrogorski paradox*. *Mimeo*, 2000.

la définissent sur l'ensemble des *jugements* individuels, c'est-à-dire sur les programmes qu'accepte un individu sur plusieurs sujets ; nous l'appellerons fonction de jugement collectif (*judgment aggregation function*). Ils définissent de même des axiomes sur les jugements individuels : complétude, transitivité et fermeture déductive<sup>8</sup>. Ils en tirent le théorème suivant :

**Théorème de List et Pettit [2002a]** *Aucune fonction de jugement collectif anonyme, universelle et satisfaisant la condition 4 de Arrow ne peut aboutir à un jugement collectif complet, transitif et collectivement fermé-déductif.*

Autrement dit, quelle que soit la fonction de choix social que l'on utilise, l'agrégation des préférences individuelles sur plusieurs projets est forcément insatisfaisante pour une partie des électeurs. On a toujours une occurrence, peut-être plus faible, des paradoxes que nous avons mentionnés. De même que pour le théorème d'impossibilité de Arrow, un moyen de s'en sortir est de restreindre le domaine de préférences, c'est-à-dire interdire certains profils de préférences. C'est l'objet de la condition de *single-switch*. Mais cette restriction sur les préférences est peu vraisemblable. Il faut se résigner à la possibilité des ces paradoxes.

Nous avons étudié dans ce chapitre les difficultés de la démocratie en acte. La section IV.1 et le paradoxe d'Ostrogorski semblent discréditer la possibilité d'une démocratie représentative équitable. Les deux moyens de la représentation que sont l'assemblée et les partis déforment nécessairement les préférences des électeurs individuels. Il est impossible de composer une assemblée sans favoriser un parti. Et quand il s'agit de voter pour un parti ou pour un poste, il est possible que la méthode d'élection choisisse un parti avec des positions minoritaires. Ainsi les opposants à une démocratie représentative soutiendront que les partis déforment le vœu de la majorité et que le vote sur un programme ne permet pas de rendre compte des aspirations des électeurs. Et la possibilité d'un mandat impératif n'y change rien [Lagerspetz, 1996]. Ils prôneront alors une démocratie directe dans laquelle la consultation des électeurs sur chacun des projets permettraient de prendre les décisions qui contentent la majorité. Mais dans ce cas, c'est le paradoxe d'Anscombe qui risque de se produire. Consulter les électeurs sur chaque sujet important n'y change rien : il est toujours possible d'aller contre une majorité d'électeurs.

---

<sup>8</sup>Un jugement  $\phi_i$  sur l'ensemble des programmes est dit fermé-déductif si, lorsqu'un programme  $\phi_i$  entraîne un autre  $\psi$  alors  $\psi$  est inclus dans  $\psi_i$ . Autrement dit, un individu accepte toujours la conséquence logique de qu'il accepte. Cela revient à dire que l'individu est d'accord avec le programme issu de la fonction de choix collectif.

Le débat entre démocratie représentative et démocratie directe revient donc à choisir entre satisfaire la majorité des électeurs sur chaque question, ou satisfaire la majorité de préférences des électeurs. Comme le montre notre exemple du paradoxe des trois référendums, le respect de la majorité sur chaque sujet peut même conduire à ne pas respecter des préférences unanimes. Sans doute loin des considérations théoriques que nous avons présentées ici, l'actuelle Constitution a coupé la poire en deux, en reconnaissant des vertus à chacune de ces conceptions de la démocratie.

La démocratie française est largement représentative. Par nécessité pratique surtout parce qu'il est complexe de toujours consulter directement les citoyens, et que ces derniers n'ont pas les moyens ni le souhait de gérer au quotidien la vie de la Nation. Par conviction peut-être car la gestion des affaires courantes de l'État est sans doute mieux accomplie par des personnes expérimentées et initiées à la chose publique.

Mais la France n'a pas renoncé pour autant à la consultation directe et celle-ci a toujours été, depuis la Révolution, employée avec parcimonie, réservée à des sujets précis mais graves : changement ou modification de la Constitution, indépendance d'une province ... La France entérine ainsi, en tant que démocratie, la volonté d'une part de laisser le peuple choisir sur les orientations fondamentales du pays, d'autre part de préserver aux citoyens la possibilité de ne pas s'occuper des affaires courantes, leur ménageant ainsi un espace privé pour l'exercice de liberté.



# Conclusion

Ce travail présente des bizarreries qu'offre le système démocratique français. Le dessin est parfois caricatural mais ne nous plaignons pas trop vite : c'est au prix de ces paradoxes que le citoyen peut intervenir dans la vie démocratique de son pays. Nous avons montré les problèmes du scrutin majoritaire, trop abondamment utilisé en France, et les problèmes inhérents à la démocratie. Nous partageons la conviction optimiste que ces systèmes peuvent être améliorés pour faciliter l'intervention du citoyen dans la vie publique.

La curiosité nous a poussé vers ces bizarreries que sont les paradoxes de vote. C'est en tirant ce petit bout de ficelle que nous avons découvert l'immense richesse de la théorie du choix social. Nous avons éprouvé un immense plaisir à découvrir, comprendre et étudier des articles et ouvrages dans ce domaine. Nous sentons aussi combien nous en avons oubliés. Plusieurs questions mériteraient d'être approfondies, notamment :

- la vérification expérimentale des modèles spatiaux de vote et de l'hypothèse d'unimodalité ;
- les mécanismes de convergence des électeurs, en fonction de l'information disponible, vers des équilibres de vote ;
- l'utilisation du MMP et son apport face aux paradoxes de vote.

Par ailleurs, nous n'avons pas mentionné la multitude de paradoxes de vote qui peuvent se rattacher à des méthodes de vote peu utilisées. Ils n'en restent pas moins intéressants, quoique plus éloignés de la pratique concrète du vote.

Nous avons toujours tenté de lier nos considérations parfois techniques à des réflexions de nature politique sur l'organisation de la vie du citoyen. Nous avons essayé d'éclairer les choix techniques des modalités de la démocratie par les conceptions sous-jacentes qui les motivent. Nous avons lié autant que possible la théorie

du choix social et la science politique même, en essayant de les éclairer l'un par l'autre. Nous pensons que la politique, pensée par les théoriciens ou vécue par les élus, peut apprendre beaucoup de la théorie du choix social. Et si les citoyens se familiarisent avec les concepts de la théorie du choix social, le débat politique en sera profondément enrichi. Avec cet objectif, nous avons tenté de rédiger ce travail de manière aussi compréhensible que possible. Nous espérons qu'il profitera au plus grand nombre.

# Bibliographie

- ABRAMSON, Paul, ALDRICH, John, DIAMOND, Matthew, LEVINE, Renan, SCOTTO, Thomas et DISKIN, Abraham. «Strategic abandonment or sincerely second best ? Strategic voting in the 1999 Israeli election». Dans «2001 Annual Meeting of the Midwest Political Science Association», 2001. URL <http://www.duke.edu/~rml5/papers>.
- ARROW, Kenneth Joseph. *Social choice and individual values*. Wiley, New York, 1963 éd., 1951. Cowles foundation for research in economics at Yale university.
- BALASKO, Yves et CRÈS, Hervé. «The probability of condorcet cycles and super majority rules». *Journal of Economic Theory*, vol. 75, n° 2 : pp. 237–270, 1997.
- BALINSKI, Michel. «Le scrutin». *Pour la Science*, vol. 294 : pp. 46–51, 2002a.
- BALINSKI, Michel. «Répartition des sièges». *Pour la Science*, , n° 294 : pp. 52–57, 2002b.
- BALINSKI, Michel et BAÏOU, Mourad. «Le découpage électoral». *Pour la Science*, , n° 294 : pp. 60–64, 2002.
- BARBERÀ, Salvador. «An introduction to strategy-proof social choice functions». *Social Choice and Welfare*, vol. 18, n° 4 : pp. 619–653, 2001.
- BON, Frédéric. *Les élections en France : histoire et sociologie*. Éditions du Seuil, Paris, 1978. ISBN 2-02-004800-0.
- BORDA, Jean-Charles. «Mémoire sur les élections au scrutin». Dans «Mémoires de l'Académie Royale des Sciences», pp. 657–665. Imprimerie Royale, Paris, 1784. Présenté à l'Académie en 1770.
- BOURSIN, Jean-Louis. *Les paradoxes du vote*. Odile Jacob, Paris, 2004. ISBN 2-7381-1379-6.

- BRAMS, Steven et FISHBURN, Peter C. «Going from theory to practice : the mixed success of approval voting». Working paper 03-06, C.V. Starr Center for Applied Economics, New York University, 2003.
- BRAMS, Steven et SANVER, Remzi. «Voter sovereignty and election outcomes». Working paper 2003-07, C.V. Starr Center for Applied Economics, New York University, 2003.
- BRAMS, Steven J. *Paradoxes in Politics*. The Free Press, New-York, 1976.
- BRAMS, Steven J. et FISHBURN, Peter C. *Approval Voting*. Birkäuser, Cambridge, 1983. ISBN 3-1643-3108-9.
- CONDORCET. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Imprimerie Royale, Paris, 1785.
- FARQUHARSON, Robin. *Theory of voting*. Yale University Press, New Haven, 1969.
- FARRELL, David M. *Comparing electoral systems*. Prentice Hall, Hemel Hempstead, 1997. ISBN 0-13-434077-9.
- FISHER, Stephen D. et MYATT, David P. «Strategic voting experiments». Working paper 2002-w4, Nuffield College and St. Catherine's College, University of Oxford, 2002.
- GÄRDENFORS, Peter. «Manipulation of social choice functions». *Journal of Economic Theory*, vol. 13, n° 2 : pp. 217–228, 1976.
- IGERSHEIM, Herrade. «Comment modifier les préférences ?» Rap. tech., BETA, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2003.
- LAGERSPETZ, Eerik. «Paradoxes and representation». *Electoral Studies*, vol. 15, n° 1 : pp. 83–92, 1996.
- LASLIER, Jean-François. «Ambiguity in electoral competition», 2003a. URL <http://ceco.polytechnique.fr/CHERCHEURS/LASLIER/>.
- LASLIER, Jean-François. «La "Nouvelle Économie Politique" : analyse économique du vote». Cahiers du Laboratoire 2003-10, Laboratoire d'Économétrie, École polytechnique, Paris, 2003b.

- LASLIER, Jean-François. *Le vote et la règle majoritaire, analyse mathématique de la politique*. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 2004a.
- LASLIER, Jean-François. «Strategic approval voting in a large electorate». Cahiers du Laboratoire 2004-001, Laboratoire d'Économétrie, École polytechnique, Paris, 2004b.
- LASLIER, Jean-François et VAN DER STRAETEN, Karine. «Une expérience de vote par assentiment». *Revue française de science politique*, vol. 54, n° 1 : pp. 99–130, 2004.
- LIST, Christian et PETTIT, Philip. «Aggregating sets of judgments : an impossibility result». *Philosophy and Economics*, vol. 18, n° 01 : pp. 89–110, 2002a.
- LIST, Christian et PETTIT, Philip. «Aggregating sets of judgments : two impossibility results compared». *Synthese*, 2002b. À paraître.
- MARTIN, Pierre. *Les systèmes électoraux et les modes de scrutin*. Clefs Politique. Montchrestien, Paris, 2e éd., 1997. ISBN 2-7076-0788-6.
- MOULIN, Hervé. *La stratégie du vote*. Monographies du séminaire d'économétrie. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1980. ISBN 2-222-02561-3.
- MYATT, David P. «A new theory of strategic voting», 2000. Révisé en 2002, URL <http://www.nuff.ox.ac.uk/Politics/papers/>.
- NEMO, Philippe. *Histoire des idées politiques aux temps modernes et contemporains*. Presses Universitaires de France, Paris, 2002. ISBN 2-13-053163-6.
- NIOU, Emerson. «Strategic voting under plurality rule : When does it matter and who should vote strategically ?» *Journal of Theoretical Politics*, vol. 13, n° 2 : pp. 209–233, 2001.
- NURMI, Hannu. *Comparing voting systems*. D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1987. ISBN 90-277-2600-0.
- NURMI, Hannu. *Voting paradoxes and how to deal with them*. Springer, Berlin, 1999. ISBN 3-540-43352-X.

ORDESHOOK, Peter C. *Game theory and political theory*. Cambridge University Press, Cambridge, London & New-York, 1986. ISBN 0-521-30612-4.

RIKER, William H. *Liberalism against populism : a confrontation between the theory of democracy and the theory of social choice*. W.H. Freeman & Company, San Francisco, CA, Etats-Unis, 1982. ISBN 0-7167-1246-6.

SATTERTHWAITE, Mark Allen. «Strategy-proofness and Arrow's conditions : existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions». *Journal of Economic Theory*, vol. 10 : pp. 187–217, 1975.

ÖZYURT, Selçuk et SANVER, Remzi. «Almost all social choice correspondences are subject to the gibbard-satterthwaite theorem», 2002. URL <http://econ.boun.edu.tr/seminars/SOzyurt-P.pdf>.